

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/2

Ημερομηνία Παράδοσης: 5/3

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Έστω συνεχής τ.μ. X , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = \frac{b - 5s}{s^2 - 8s + 15}.$$

1. Να υπολογίσετε τη σταθερά b .
2. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X .
3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ. X , $E[X]$, χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .
4. Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ. X , $\text{Var}(X)$, χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .
5. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \geq 3)$.
6. Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 3 \mid 0 \leq X \leq 3)$.

Άσκηση 2

Έστω δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y . Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο $\lambda = 2$ και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 3$.

1. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $W = 2(X + Y) + 5$.
2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $X + 2Y$.

Άσκηση 3

Έστω συνεχής τυχαία μεταβλητή X , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = e^{4s+s^2}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή Z , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$Z = 3X - 5$$

Να υπολογιστούν:

1. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Z , $M_Z(s)$.
2. Η μέση τιμή της τ.μ. Z , $E[Z]$.
3. Η διασπορά της τ.μ. Z , $\text{Var}(Z)$.

Άσκηση 4

Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή X για την οποία ισχύει:

$$M_X(s) = ae^s + be^{3s} + ce^{7s}, E[X] = 4 \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = 6.$$

όπου a , b και c είναι σταθερές.

1. Υπολογίστε τις σταθερές a , b και c .
2. Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας της X .

Άσκηση 5

Το πλήθος των πελατών που καλούν ένα τηλεφωνικό κέντρο σε μία συγκεκριμένη ημέρα μοντελοποιείται ως μία τ.μ. Ποισσον με παράμετρο λ . Ο χρόνος (σε λεπτά) που απαιτείται για την εξυπηρέτηση κάθε πελάτη ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 10 και διασπορά 4.

Έστω Y ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών της ημέρας.

1. Να βρείτε το μετασχηματισμό στιγμών της τυχαίας μεταβλητής Y , δηλαδή $M_Y(s)$.
2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E[Y]$.
3. Να υπολογίσετε τη διασπορά $\text{Var}(Y)$.

Άσκηση 6

Ένας αυτοκινητιστής περνά 4 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα $p = 1/2$. Οι χρόνοι αναμονής, X_i , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 1 λεπτό. Έστω Y ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

- (α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y .
- (β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .
- (γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).