

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/03/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 03/04/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Στοχαστικές Διαδικασίες Bernoulli, Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson

Άσκηση 1.

Πακέτα πληροφορίας καταφτάνουν σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με μία στοχαστική διαδικασία *Poisson* με ένταση 1500 πακέτα το δευτερόλεπτο.

- 1) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι την άφιξη του 10000-στού πακέτου;
- 2) Ποιο είναι το μέσο πλήθος των πακέτων που φτάνουν στον κόμβο μεταξύ 06:50 και 07:00;
- 3) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς 10 πακέτα φτάνουν στον κόμβο στη διάρκεια 0.01 δευτερολέπτων ;
- 4) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ της άφιξης του 1000-στού και του 1001-στού πακέτου είναι μεγαλύτερο από 0.0005 δευτερόλεπτα;

Άσκηση 2.

Οι μεταφορικές εταιρίες S και T στέλνουν φορτία από την Αθήνα στο Ηράκλειο σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες *Poisson* με ρυθμούς λ_S και λ_T (φορτία ανά ημέρα), αντίστοιχα. Το βάρος κάθε φορτίου σε τόνους, ανεξάρτητα από ποια μεταφορική προέρχεται, είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 600, \\ 0.3, & x = 1000, \\ 0.2, & x = 2000, \\ 0, & \text{άλλο} \end{cases}$$

- 1) Ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος: 5 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 09:00-15:00 μέσω της μεταφορικής S ΚΑΙ 7 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 16:00-24:00 μέσω της μεταφορικής T ;
- 2) Υπολογίστε το μέσο βάρος του συνολικού φορτίου που φτάνει στο Ηράκλειο στη διάρκεια 6 ωρών.

Άσκηση 3.

Βρίσκεστε για κατασκήνωση στον Αμαζόνιο, αλλά ξεχάσατε το εντομοαπωθητικό σας. Ως αποτέλεσμα, κάθε δευτερόλεπτο σας τσιμπάει ένα κουνούπι με πιθανότητα $p=0.2$.

- 1) Ποια η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- 2) Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- 3) Τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα δεν σας έχει τσιμπήσει κανένα κουνούπι. Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά (μετρώντας από $t=10$);

Άσκηση 4.

Υποθέστε ότι έχετε n κόλλες χαρτιού σε ένα συρτάρι. Ζωγραφίζετε σε μία κόλλα, την υπογράφετε και στη συνέχεια, αντί να την τοποθετήσετε στην άκρη, την βάζετε ξανά πίσω στο συρτάρι. Εάν κάθε κόλλα είναι το ίδιο πιθανόν να ζωγραφιστεί κάθε φορά, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός από κόλλες που θα έχετε ζωγραφίσει, πριν υπογράψετε και τις n κόλλες;

Άσκηση 5.

Για τις ανάγκες της δουλειάς σας, έχετε κάνει για μία μέρα εκτροπή από το τηλέφωνο της εργασίας στο προσωπικό σας τηλέφωνο. Ως αποτέλεσμα, όταν χτυπήσει το τηλέφωνό σας δεν γνωρίζετε αν είναι επαγγελματικό ή προσωπικό. Υποθέστε ότι όταν χτυπήσει είναι επαγγελματικό με πιθανότητα p ή προσωπικό τηλεφώνημα με πιθανότητα $1 - p$. Στο τέλος του ωραρίου σας, έχετε δεχτεί συνολικά 30 κλήσεις.

- 1) Ποια η ΣΜΠ, η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των επαγγελματικών τηλεφωνημάτων;
- 2) Προσδιορίστε την μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς των αριθμών των δύο ειδών τηλεφωνημάτων.
- 3) Υποθέστε ότι το πρώτο τηλεφώνημα είναι επαγγελματικό. Ποια η δεσμευμένη ΣΜΠ, μέση τιμή και διασπορά των επαγγελματικών κλήσεων;

Άσκηση 6.

Ένας ψαράς πιάνει ψάρια σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0.6$ ανά ώρα. Ο ψαράς αρχικά ψαρεύει για δύο ώρες. Εάν σε αυτό το διάστημα πιάσει τουλάχιστον ένα ψάρι, τότε σταματάει το ψάρεμα. Διαφορετικά, συνεχίζει μέχρι να πιάσει ένα ψάρι οπότε και σταματάει το ψάρεμα.

- 1) Βρείτε την πιθανότητα ότι θα αναγκαστεί να ψαρεύει παραπάνω από δύο ώρες.
- 2) Βρείτε την πιθανότητα ότι πιάνει τουλάχιστον δύο ψάρια.
- 3) Βρείτε τον μέσο συνολικό χρόνο ψαρέματος, δεδομένου ότι ήδη ψαρεύει για 4 ώρες.
- 4) Βρείτε την πιθανότητα ότι ο συνολικός χρόνος που περνάει ψαρεύοντας είναι μεγαλύτερος των δύο και μικρότερος ή ίσος των επτά ωρών.

- 5) Προσομοιώστε την παραπάνω άσκηση σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, εκτελώντας 10^4 πειράματα όπου στο κάθε πείραμα υπολογίζετε τον συνολικό χρόνο ψαρέματος του ψαρά. Απεικονίστε την παραπάνω κατανομή σε ένα ιστόγραμμα. Δοκιμάστε για μικρότερες τιμές του λ και εξηγήστε συνοπτικά τις παρατηρήσεις σας.
(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε συναρτήσεις όπως `poissrnd()` για Matlab ή `random.poisson()` για Python).