

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο
2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/4/2025

Ημερομηνία Παράδοσης 5/5/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

- α) Μία υπολογιστική μηχανή χρησιμοποιεί τα ψηφία 0 και 1 για τους υπολογισμούς της, οι οποίοι πραγματοποιούνται σε διακριτά στάδια. Σε κάθε στάδιο η πιθανότητα να αλλάξει η τιμή ενός ψηφίου είναι p και η πιθανότητα να παραμείνει η ίδια είναι $1 - p$. Σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την τιμή ενός ψηφίου, καθώς και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής του.
- β) Ένας μεθυσμένος περιφέρεται ανάμεσα σε πέντε τετράγωνα στην 62 Μαρτύρων (όπως στο παρακάτω σχήμα). Εάν βρίσκεται στο δεύτερο, το τρίτο ή το τέταρτο τετράγωνο, τότε πάει σε ένα από τα διπλανά τετράγωνα με ίση πιθανότητα. Εάν βρεθεί στο πρώτο τετράγωνο όπου βρίσκεται το σπίτι του ή στο πέμπτο όπου βρίσκεται το μπαρ παραμένει εκεί μέχρι το πρωί. Σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την κίνηση του μεθυσμένου, καθώς και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της.

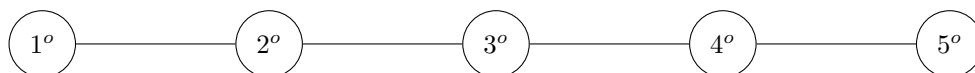


Figure 1: Απεικόνιση των τετραγώνων όπου περιπλανιέται ο μεθυσμένος.

Άσκηση 2

Ο καθηγητής στοχαστικών διαδικασιών κος Λυκίδης όταν βαριέται στις ώρες γραφείου του παίζει το εξής παιχνίδι: Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα επανειλημμένα και μετράει μετά από πόσες ρίψεις θα πετύχει την ακολουθία $\{\Gamma, K, \Gamma, \Gamma\}$

- 1) Σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το παιχνίδι και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της.
- 2) Υπολογίστε την πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει με τον ελάχιστο αριθμό ρίψεων.
- 3) Υπολογίστε την πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει το πολύ μετά από 7 ρίψεις.
- 4) Βρείτε την στατική κατανομή της αλυσίδας.

Άσκηση 3

Θεωρήστε τον παρακάτω πίνακα:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & \Gamma \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ \Gamma \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- 1) Δείξτε ότι είναι πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει.
- 2) Υπολογίστε την πιθανότητα να καταλήξουμε στην κατάσταση B σε 5 βήματα, ξεκινώντας από την κατάσταση Γ.
- 3) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθούμε για πρώτη φορά στην κατάσταση Γ μετά από 6 βήματα, δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση A.
- 4) Υπολογίστε την πιθανότητα σε διάστημα 10 βημάτων να μην βρεθούμε ποτέ στην κατάσταση B.
- 5) Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας της αλυσίδας.
- 5) Βρείτε την στατική κατανομή της αλυσίδας.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε επανειλημμένα ένα δίκαιο ζάρι και ορίζουμε S_n ως το άθροισμα των n πρώτων ρίψεων.

- 1) Έστω R_n το υπόλοιπο της διαίρεσης του S_n με το 7, δηλαδή $R_n = S_n \bmod 7$. Δείξτε ότι η ακολουθία $R_1, R_2, R_3 \dots$ παρουσιάζει τη μαρκοβιανή ιδιότητα.
- 2) Βρείτε τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας εξετάζοντας την πιθανότητα μετάβασης από το R_n στο R_{n+1} και τις τιμές τις οποίες μπορεί να πάρει.
- 3) Βρείτε την πιθανότητα το S_n σε βάθος χρόνου να διαιρείται με το 7.

Άσκηση 5

Ένας δρομέας προπονείται για τον μαραθώνιο τρέχοντας τουλάχιστον 20 χιλιόμετρα κάθε μέρα και σημειώνοντας τον χρόνο που του παίρνει για να τρέξει κάθε χιλιόμετρο. Λίγες μέρες πριν τον αγώνα αποφασίζει να αναλύσει τους χρόνους του χρησιμοποιώντας μία μαρκοβιανή αλυσίδα, χωρίς να τους διαχωρίσει ανάλογα τη μέρα. Βλέπει πως η ταχύτητά του μεταβάλλεται ανάμεσα στα 8.5 και 11 min/km σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8.5 & 9 & 10 & 10.5 & 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8.5 \\ 9 \\ 10 \\ 10.5 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- 1) Γράψτε έναν πιθανό τρόπο με τον οποίο μπορεί να μεταβληθεί η ταχύτητα του δρομέα σε διάστημα 10 χιλιομέτρων.
- 2) Σχεδιάστε την αλυσίδα που περιγράφει ο πίνακας και εξηγήστε αν είναι στοχαστική διαδικασία Γεννήσεως-Θανάτου.
- 3) Υπολογίστε τις εξισώσεις ισορροπίας, καθώς και τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.
- 4) Υπολογίστε την στατική κατανομή της αλυσίδας, καθώς και την μέση ταχύτητα του δρομέα.

Άσκηση 6

Ένα ζωτικό διέπραξε σοβαρά εγκλήματα κατά της Βασίλισσάς του, οπότε και το τιμώρησε να περιπλανιέται επ'άπειρον στον άπειρο γράφο της παρακάτω εικόνας, ξεκινώντας από τον κόμβο με την ταμπέλα 0.

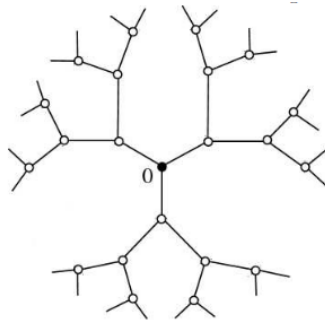


Figure 2: Ο γράφος της φυλακής του ζωτικού.

Το ζωτικό κινείται στον γράφο με τον εξής τρόπο, όταν βρίσκεται σε έναν κόμβο Z_i , επιλέγει τον επόμενο κόμβο Z_{i+1} από τους τρεις γειτονικούς του με ίση πιθανότητα. Ορίζουμε την τ.μ. $D(Z_i)$ ως την απόσταση του ζωτικού από τον αρχικό κόμβο. Για παράδειγμα, στο πρώτο βήμα υποχρεωτικά θα είναι $D(Z_1) = 1$ και αν στο επόμενο βήμα δεν επιστρέψει στον κόμβο 0, $D(Z_2) = 2$ κ.ο.κ.

- α) Δείξτε ότι οι $D(Z_1), D(Z_2), \dots$ παρουσιάζουν την μαρκοβιανή ιδιότητα.
- β) Εξετάστε αν η μαρκοβιανή αλυσίδα αυτή είναι σ.δ. γεννήσεως-θανάτου. Αν είναι σ.δ. γεννήσεως θανάτου, γράψτε την γενική μορφή των εξισώσεων ρροπίας για κάποιο D .
- γ) *Bonus*: Σχεδιάστε την αλυσίδα.
- δ) Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που εξαγάγετε από την Χρεωκοπία του Παίκτη, εξετάστε αν υπάρχει έμμονη κατάσταση στην αλυσίδα.