

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/5/2025

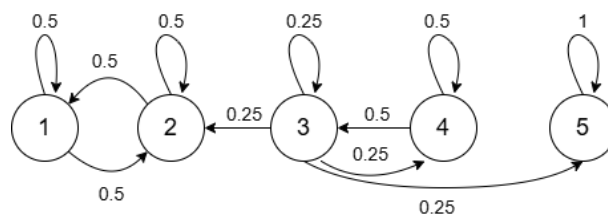
Ημερομηνία Παράδοσης: 26/5/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

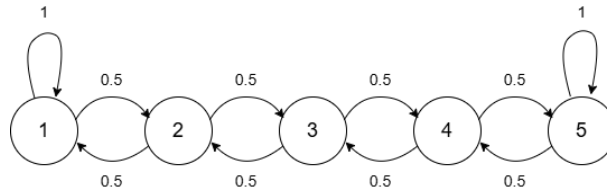
Έστω η παρακάτω αλυσίδα Markov:



- Αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση αποφασίστε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή αperiοδική.
- Προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας.
- Υποθέτοντας ότι η διαδικασία αρχίζει από την κατάσταση 4, υπολογίστε τις πιθανότητες απορρόφησης για την κάθε κλάση επικοινωνίας.
- Ξεκινώντας από την κατάσταση 4, ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να φτάσουμε για πρώτη φορά σε μια κλάση επικοινωνίας (συμπεριλαμβανομένης και της μετάβασης στην οποία φτάνουμε στην κλάση);

Άσκηση 2.

Έστω το πρόβλημα 1β του 4ου σετ ασκήσεων του μαθήματος, στο οποίο ένας μεθυσμένος περιφέρεται ανάμεσα σε 5 τετράγωνα, με το πρώτο τετράγωνο να αντιπροσωπεύει το σπίτι του και το πέμπτο να αντιπροσωπεύει το μπαρ. Όπως είδαμε, το παραπάνω πρόβλημα μοντελοποιείται με την παρακάτω μαρκοβιανή αλυσίδα.



- (α) Ποια η πιθανότητα ο μεθυσμένος να φτάσει σπίτι του, δεδομένου ότι ξεκινάει από το τετράγωνο 4;
- (β) Ξεκινώντας από το τετράγωνο 3, ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να φτάσει είτε στο σπίτι του, είτε στο μπαρ;
- (γ) Ξεκινώντας από το τετράγωνο 2, υπολογίστε τον μέσο αριθμό των φορών που ο μεθυσμένος θα βρεθεί στην κατάσταση 3.

Άσκηση 3.

Μια στοχαστική διαδικασία μοντελοποιεί τη διάδοση μιας φήμης σε μια παρέα φίλων ως εξής: Υπάρχουν $N = 5$ άτομα, από τα οποία κάποιος έχει ακούσει τη φήμη και κάποιος όχι. Σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή, επιλέγονται τυχαία δύο άτομα από την παρέα για να αλληλεπιδράσουν. Όλα τα ζεύγη ατόμων είναι ισοπίθανα να επιλεγούν. Αν μόνο ο ένας από τους δύο έχει ακούσει τη φήμη, τότε με πιθανότητα $\alpha = 0.1$, η φήμη μεταδίδεται στον άλλον. Θεωρούμε ότι η διαδικασία ξεκινά στη χρονική στιγμή $n = 0$, όπου μόνο ένα άτομο γνωρίζει τη φήμη. Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι η φήμη να φτάσει στα αυτιά όλων.

Άσκηση 4.

Έστω ότι παίζετε ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζετε ένα ευρώ με πιθανότητα p , και χάνετε ένα ευρώ με πιθανότητα $q = 1 - p$. Υπολογίστε την ποσότητα

$$\alpha_x := P_x(S_b < S_0),$$

δηλαδή την πιθανότητα να κερδίσετε ένα ποσό b προτού χάσετε όλα σας τα λεφτά, ξεκινώντας με ένα ποσό x .

- (α) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα σαν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, με καταστάσεις $0, 1, 2, \dots, b$, όπου οι καταστάσεις 0 και b είναι απορροφητικές.
- (β) Υπολογίστε τις εξισώσεις για τις πιθανότητες απορρόφησης.
- (γ) Αν $p = q = \frac{1}{2}$, δείξτε ότι

$$\alpha_x = \frac{x}{b}.$$

Άσκηση 5.

Το πόνι του ίππου στο σκάκι κινείται με τον επιτρεπόμενο τρόπο, δηλαδή με κίνηση που σχηματίζει ένα κεφαλαίο Γ, πάνω σε μια κλασική σκακιέρα 8×8 . Ο ίππος επιλέγει ομοιόμορφα στην τύχη το τετράγωνο στο οποίο θα μετακινηθεί. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται άπειρες φορές, κάθε φορά με την ίδια λογική: ο ίππος κινείται τυχαία, επιλέγοντας ισοπίθανα ανάμεσα στις διαθέσιμες κινήσεις του, χωρίς μνήμη του παρελθόντος. Να μοντελοποιήσετε την παραπάνω τυχαία διαδικασία ως αλυσίδα Markov και να απαντήσετε στα εξής:

- (α) Γιατί η παραπάνω στοχαστική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως αλυσίδα Markov;
- (β) Να ορίσετε τον χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.
- (γ) Να βρείτε την στατική κατανομή της αλυσίδας. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία αυτής της κατανομής;
- (δ) Αν ο ίππος ξεκινά από το τετράγωνο A1 (κάτω αριστερά στη σκακιέρα), να υπολογίσετε τον μέσο αριθμό κινήσεων έως ότου ξαναβρεθεί στην αρχική του θέση.
- (ε) Ποια τετράγωνα της σκακιέρας έχουν τη μεγαλύτερη πιθανότητα στην στατική κατανομή; Ποια έχουν τη μικρότερη; Πώς το εξηγείτε αυτό;

Άσκηση 6.

Υλοποιήστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 5 προγραμματιστικά, σε Matlab ή Python, χωρίς να χρησιμοποιήσετε έτοιμες συναρτήσεις, βιβλιοθήκες και toolboxes που αφορούν Μαρκοβιανές αλυσίδες. Απαντήστε στα ερωτήματα (δ) και (ε) πειραματικά, και συγκρίνετε τα αποτελέσματα των πειραμάτων σας με τις θεωρητικές τιμές που έχετε ήδη υπολογίσει. Εξετάστε τον μέσο αριθμό κινήσεων που χρειάζεται ο ίππος για να βρεθεί από το τετράγωνο A1 στο Θ8. Σχολιάστε.

1. Αναπαραστήστε κάθε τετράγωνο της σκακιέρας ως αριθμό από 0 έως 63.
2. Υλοποιήστε μια συνάρτηση που για κάθε θέση (x, y) της σκακιέρας επιστρέφει τις επιτρεπόμενες θέσεις του ίππου.
3. Δημιουργήστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P \in \mathbb{R}^{64 \times 64}$, όπου για κάθε θέση i και κάθε νόμιμη μετακίνηση προς θέση j θέτετε $P[i, j] = \frac{1}{k}$, με k το πλήθος των διαθέσιμων κινήσεων από i .
4. Υλοποιήστε πειραματικά την προσομοίωση της αλυσίδας για 10^6 βήματα, και εκτιμήστε τη στατική κατανομή ως σχετική συχνότητα επισκέψεων κάθε τετραγώνου. Αναπαραστήστε τα αποτελέσματα σε ένα θερμικό γράφημα (heatmap) 8×8 .
Hint: Με τη χρήση της συνάρτησης *rand* μπορείτε να μοντελοποιήσετε την τυχαιότητα μετάβασης από μια κατάσταση s_t σε μία κατάσταση s_{t+1} . Συνδυάζοντας καταλλήλα τις συναρτήσεις *find*, *cumsum*, τη σωστή, κάθε φορά, γραμμή του πίνακα P και το αποτέλεσμα της *rand* θα μπορείτε να αποφανθείτε ποια θα είναι η εκάστοτε κατάσταση s_{t+1} σε κάθε βήμα της προσομοίωσης σας.