

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
5 Απριλίου 2025 - Διάρκεια: 2.5 Ωρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Το πλήθος των μηνυμάτων που συγκεντρώνονται σε ένα πακέτο ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Υποθέτουμε ότι τα μήκη των μηνυμάτων είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$ Mbyte, δηλαδή $X_i \sim U[0, 1]$. Έστω Y το συνολικό μήκος του πακέτου.

- (α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;
(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .
(γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Σε μία σχολή πληροφορικής με 2000 φοιτητές, έστω ότι 50 φοιτητές την ημέρα χρειάζονται να χρησιμοποιήσουν υπολογιστή σε εργαστήριο της σχολής (1 υπολογιστή ο κάθε φοιτητής). Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός των υπολογιστών που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το εργαστήριο της σχολής για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί τους φοιτητές με πιθανότητα τουλάχιστον 90%.

Δίνεται η ακόλουθη τιμή για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi(1.282) = 0.9$.

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις. Πακέτα τύπου A, B και C τοποθετούνται σε έναν κοινό buffer ενός κόμβου, με τα πακέτα να φτάνουν σύμφωνα με 3 ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με εντάσεις a , b και c (πακέτα ανά λεπτό), αντίστοιχα. Για τα πρώτα τέσσερα ερωτήματα αυτού του προβλήματος, υποθέτουμε ότι ο buffer αδειάζει αμέσως μόλις δεχθεί συνολικά 10 πακέτα.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα στα πρώτα δέκα πακέτα που φτάνουν στον buffer, το τρίτο **και** ένα ακόμα από τα υπόλοιπα 9 να είναι πακέτα τύπου A;

(β) Προσδιορίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού χρόνου μεταξύ διαδοχικών αδειασμάτων του buffer.

(γ) Προσδιορίστε την πιθανότητα ότι ακριβώς δύο πακέτα **από κάθε έναν** από τους τρεις τύπους φτάνουν στην είσοδο του buffer κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος διάρκειας πέντε λεπτών.

Για το υπόλοιπο αυτού του προβλήματος, χρησιμοποιείται ένας διαφορετικός κανόνας για το άδειασμα του buffer. Για τις ερωτήσεις (δ) και (ε), υποθέτουμε ότι ο buffer αδειάζει αμέσως μόλις δεχθεί τρία πακέτα τύπου A.

(δ) Προσδιορίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά για τον συνολικό χρόνο μεταξύ διαδοχικών αδειασμάτων του buffer.

(ε) Για έναν παρατηρητή που φτάνει σε τυχαία χρονική στιγμή, πολύ μετά την έναρξη της διαδικασίας, προσδιορίστε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τις εξής τυχαίες μεταβλητές:

- **(ε-i)** το χρόνο, U , μέχρι την άφιξη του επόμενου πακέτου στην είσοδο του buffer.
- **(ε-ii)** το χρόνο, V , μέχρι το επόμενο άδειασμα του buffer.