

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1: Ροπογεννήτριες

Άσκηση 1

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. Y και Z . Η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda = 2$. Η τ.μ. Z είναι Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.

1. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $2Z + 3$.
2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Y + Z$.

Λύση

Για την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$.

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$.

1. Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ., $Y = aX + b$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(aX+b)}] = e^{sb} E[e^{saX}] = e^{sb} M_X(sa) .$$

Επομένως,

$$M_{2Z+3} = e^{3s} M_Z(2s) = e^{3s} \cdot e^{3(e^{2s}-1)} .$$

2. Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Y = X_1 + \dots + X_n$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1+\dots+X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s) .$$

Επομένως,

$$M_{Y+Z} = M_Y(s) \cdot M_Z(s) = \frac{2}{2-s} \cdot e^{3(e^s-1)} .$$

Άσκηση 2

Είδαμε ότι το άθροισμα σταθερού αριθμού N ανεξάρτητων Κανονικών τ.μ. $Y = X_1 + \dots + X_N$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, ακολουθεί Κανονική κατανομή $Y \sim \mathcal{N}(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2)$. Βρείτε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι όταν το N είναι τυχαία μεταβλητή (και όχι σταθερός αριθμός), το άθροισμα N ανεξάρτητων Κανονικών τ.μ. ΔΕΝ ακολουθεί Κανονική κατανομή.

Λύση

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα τυχαίου αριθμού κανονικών κατανομών παράγει νούμερα, που με μεγάλη πιθανότητα είναι μακριά από τη μέση τιμή της κατανομής τους (σε αντίθεση με την Κανονική κατανομή, που η πυκνότητα πιθανότητας μεγιστοποιείται στην μέση τιμή).

Έστω ότι η N παίρνει τιμές 1 και 2, με πιθανότητα p και $1-p$, αντίστοιχα και έστω οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1 \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι το σ^2 είναι αρκετά μικρό, και επομένως οι τυχαίες μεταβλητές έχουν κατανομή που είναι κατά πολύ συγκεντρωμένη γύρω από τη μέση τιμή της. Για παράδειγμα, στο Γράφημα 1 έχουμε την Κανονική κατανομή με $\sigma^2 = 0.01$.

Το άθροισμα $Y = \sum_{i=1}^N X_i$, παίρνει τιμές είτε πολύ κοντά στο 1 (όταν $N = 1$), είτε πολύ κοντά στο 2 (όταν $N = 2$). Η μέση τιμή της Y όμως είναι $E[Y] = E[X_1]p_N(1) + E[X_1 + X_2]p_N(2) = 1 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 2 - p$, που γενικά είναι μακριά από τις τιμές 1 και 2. Επομένως, η Y δεν μπορεί να είναι Κανονική τ.μ. Το Γράφημα 2 δείχνει το ιστόγραμμα 10.000 δειγμάτων από την παραπάνω κατανομή, με $p = 1/3$.

Άσκηση 3

Στη διάρκεια μίας μέρας, ο αριθμός των πελατών, M , του Πλαισίου οι οποίοι αγοράζουν υπολογιστές ακολουθεί κατανομή Ποισσον με παράμετρο λ : $M \sim \text{Ποισσον}(\lambda)$. Υπάρχουν συνολικά n μοντέλα υπολογιστών και κάθε πελάτης αποφασίζει τυχαία και με την ίδια πιθανότητα να αγοράσει ένα από τα n διαθέσιμα μοντέλα, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες και ανεξάρτητα από το πλήθος των πελατών που επισκέπτονται το κατάστημα.

- (α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής K , του πλήθους των πελατών που αγοράζουν το μοντέλο #1.
- (β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής K . Αναγνωρίζετε τη συνάρτηση πιθανότητας της K . Ποια η πιθανότητα ότι κανένας πελάτης δεν αγοράζει το μοντέλο #1 στη διάρκεια μίας μέρας.

Βοήθεια: Ορίστε τη τυχαία μεταβλητή X_i που παίρνει την τιμή 1 όταν ο i -στός πελάτης αγοράζει το μοντέλο #1 και την τιμή 0, όταν ο i -στός πελάτης αγοράζει κάποιο άλλο μοντέλο.

Τι κατανομή έχουν οι τυχαίες μεταβλητές X_i ; Εκφράστε την τυχαία μεταβλητή K συναρτήσει των X_i .

- (γ) Η αξία, C_i , κάθε υπολογιστή που πωλείται ακολουθεί συνεχή ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 1 και 3 (σε χιλιάδες ευρώ), $C_i \sim U[1, 3]$. Οι τυχαίες μεταβλητές C_i μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες μεταξύ τους καθώς κάθε πελάτης επιλέγει ανεξάρτητα από τους άλλους μοντέλο και το διαμορφώνει ανεξάρτητα.

Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού τζίρου, R , του καταστήματος από την πώληση υπολογιστών στη διάρκεια μίας μέρας.

- (δ) Το κατάστημα έχει ένα πρόγραμμα επιβράβευσης. Κάθε αγορά υπολογιστή μοντέλου #2 έως # n συνοδεύεται από ένα κουπόνι 50 ευρώ, ενώ η αγορά του μοντέλου #1 αποφέρει κουπόνια 50, 100 ή 150 ευρώ, ανάλογα με τη διαμόρφωσή του. Οι πελάτες που αγοράζουν το μοντέλο #1 επιλέγουν μία από τις 3 εκδόσεις με την ίδια πιθανότητα.

Υπολογίστε τη μέση τιμή της συνολικής αξίας, S , των κουπονιών που δίνει το κατάστημα στη διάρκεια μίας μέρας.

Λύση

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X_i ως:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i\text{-οστός πελάτης επιλέγει το \#1} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{n}, \quad P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Συνεπώς, οι τυχαίες μεταβλητές X_i με $i = 1, 2, 3, \dots, M$ είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανοημένες τυχαίες μεταβλητές Βερνουλλι με παράμετρο $p = \frac{1}{n}$, δηλαδή:

$$X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{n}\right)$$

- (α) Το πλήθος, K , των πελατών που αγοράζουν το μοντέλο #1 είναι:

$$K = X_1 + X_2 + \dots + X_M, \quad (1)$$

δηλαδή εκφράζεται ως το άθροισμα ενός τυχαίου πλήθους, M , ανεξάρτητων τ.μ. $\text{Bernoulli}(1/n)$, όπου $M \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Έχουμε ότι:

$$E[X_i] = p = \frac{1}{n}, \quad \text{var}(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}. \quad (2)$$

$$E[M] = \lambda, \quad \text{var}(M) = \lambda. \quad (3)$$

Συνεπώς:

$$E[K] = E[M]E[X] = \lambda \frac{1}{n} = \frac{\lambda}{n}. \quad (4)$$

$$\text{var}(K) = E[M]\text{var}(X) + \text{var}(M)(E[X])^2. \quad (5)$$

$$= \lambda \frac{n-1}{n^2} + \lambda \frac{1}{n^2} = \frac{\lambda}{n}. \quad (6)$$

(β) Η ροπογεννήτρια της *Bernoulli* ($p = \frac{1}{n}$):

$$M_{X_i}(s) = 1 - p + pe^s = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}e^s$$

Η ροπογεννήτρια της *Poisson* (λ):

$$M_M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

Έχουμε ότι:

$$M_K(s) = M_M(s) \Big|_{e^s = M_{X_i}(s)}$$

$$= e^{\lambda(e^s-1)} \Big|_{e^s = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}e^s}$$

$$M_K(s) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^s-1)}$$

Άρα:

$$K \sim \text{Poisson} \left(\frac{\lambda}{n} \right)$$

$$P(K=0) = \frac{(\lambda/n)^k}{k!} e^{-\lambda/n} \Big|_{k=0} = e^{-\lambda/n}$$

(γ)

$$f_{C_i}(c) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} - \frac{1}{2}, & 1 \leq c \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E[C] = \frac{1+3}{2} = 2, \quad \text{Var}(C) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Έχουμε ότι:

$$R = C_1 + C_2 + \dots + C_M$$

Συνεπώς, τώρα έχουμε:

$$E[R] = E[M] \cdot E[C] = \lambda \cdot 2 = \frac{2\lambda}{1}.$$

$$\text{Var}(R) = E[M]\text{Var}(C) + \text{Var}(M)(E[C])^2$$

$$= \lambda \cdot \frac{1}{3} + \lambda \cdot 2^2 = \frac{13\lambda}{3}.$$

(δ) Έστω T_i η αξία του κουπονιού που δίνεται στον i -στό πελάτη αν αγοράζει το μοντέλο #1. Τότε:

$$P_{T_i}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & t = 50, 100, 150 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αφού η T_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή:

$$E[T_i] = 100.$$

Στη διάρκεια μιας ημέρας ακριβώς $M - K$ πελάτες αγόρασαν μοντέλα #2 έως # n και λαμβάνουν το κουπόνι των 50 ευρώ.

Η συνολική αξία των κουπονιών που λάμβαναν οι K πελάτες που αγόρασαν το μοντέλο #1 είναι $T_1 + \dots + T_K$.

Τελικά,

$$S = (M - K) \cdot 50 + (T_1 + \dots + T_K).$$

$$\begin{aligned}
E[S] &= (E[M] - E[K]) \cdot 50 + E[T_1 + \cdots + T_K] \\
&= (E[M] - \frac{\lambda}{n}) \cdot 50 + \frac{\lambda}{n} \cdot 100 \\
&= \left(\lambda - \frac{\lambda}{n}\right) 50 + \frac{\lambda}{n} \cdot 100 \\
E[S] &= 50\lambda \left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Η Ειρήνη παίρνει μία εξέταση με 12 ερωτήσεις. Ο χρόνος T_i που αφιερώνει στην i -στή ερώτηση είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή $E[T_i] = \frac{1}{3}$ ώρες. Οι τ.μ. T_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η Ειρήνη απαντά κάθε ερώτηση σωστά με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, ανεξάρτητα από ερώτηση σε ερώτηση.

Ορίζουμε τις εξής τ.μ.:

- N : Το πλήθος των ερωτήσεων που η Ειρήνη απαντά σωστά.
- X : Ο συνολικός χρόνος που η Ειρήνη αφιερώνει στις ερωτήσεις που απαντά σωστά.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. N .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X .

(γ) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. X .

(α) Η τ.μ. N ακολουθεί Διωνυμική κατανομή:

$$N \sim \Delta(n = 12, p = \frac{2}{3}).$$

Συνεπώς,

$$P_N(k) = \binom{12}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{12-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 12.$$

$$E[N] = np = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8.$$

$$\text{Var}(N) = np(1-p) = 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2.67.$$

(β) Έστω X_j ο χρόνος που η Ειρήνη αφιερώνει στην j -στή ερώτηση που απαντά σωστά. Από την εκφώνηση:

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda = 3), \quad E[X_i] = \frac{1}{3}, \quad \text{Var}(X_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Συνεπώς,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

όπου $N \sim \Delta(12, \frac{2}{3})$, δηλαδή το X είναι το άθροισμα ενός τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων εκθετικά κατανομμένων τ.μ.

Γνωρίζουμε ότι:

$$E[X] = E[N] \cdot E[X_i] = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2.67.$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[N] \cdot \text{Var}(X_i) + (E[X_i])^2 \cdot \text{Var}(N)$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{8}{3}$$

$$= \frac{32}{27} = 1.1852.$$

(γ) Η ροπογεννήτρια της Διωνυμικής κατανομής:

$$M_N(s) = (1 - p + pe^s)^n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^s\right)^{12}$$

και της Εκθετικής κατανομής:

$$M_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} = \frac{3}{3 - s}.$$

Επομένως,

$$M_X(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_{X_i}(s)} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^s \right)^{12} \Big|_{e^s = \frac{3}{3-s}}$$
$$\Rightarrow M_X(s) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-s} \right)^{12} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3-s} \right)^{12}.$$