

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο
2025-2026

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4

Βασικές Έννοιες Μαρκοβιανών Διαδικασιών

Επιμέλεια: Σκανδάλης Γιώργος

Άσκηση 1

Μία αλυσίδα Μαρκόβ 7 καταστάσεων έχει πιθανότητες μετάβασης οι οποίες προσδιορίζονται από την εξής σχέση:

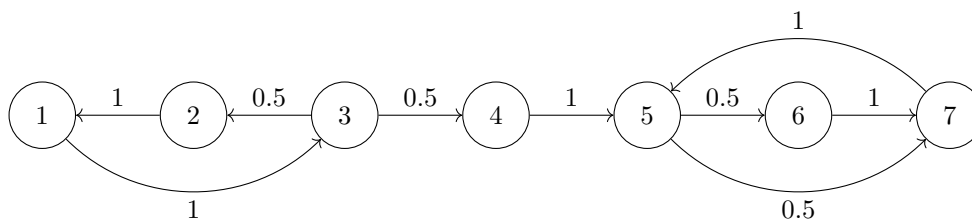
$$p_{i,j} = \begin{cases} 0.5, & (i,j) \in \{(3,2), (3,4), (5,6), (5,7)\} \\ 1, & (i,j) \in \{(1,3), (2,1), (4,5), (6,7), (7,5)\} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω X_k η κατάσταση της αλυσίδας την χρονική στιγμή k .

- Σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας.
- Για ποιες τιμές του X οι πιθανότητες μετάβασης n -οστής τάξης έχουν θετικές τιμές;
- Για κάθε κατάσταση i προσδιορίστε το σύνολο $A(i)$ των καταστάσεων οι οποίες είναι προσιτές από την i .
- Χαρακτηρίστε τις καταστάσεις της αλυσίδας ως μεταβατικές ή έμμονες. Για κάθε έμμονη κατάσταση βρείτε αν είναι περιοδική ή όχι, καθώς και την περίοδό της.
- Γράψτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας.
- Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μη μηδενικών μεταβάσεων που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα ώστε όλες οι καταστάσεις να ανήκουν στην ίδια κλάση επικοινωνίας.

Λύση

- α) Το σχήμα της αλυσίδας είναι το παρακάτω:



- β) Μπορούμε να εκφράσουμε την ερώτηση με πιο απλό τρόπο ως: Με πόσους τρόπους και για ποιές τιμές του n μπορούμε να μεταβούμε στην κατάσταση 5 από την 1;
- Η μετάβαση μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:
- Ο πρώτος τρόπος είναι η απευθείας μετάβαση στην 5 από την 1 με 3 βήματα ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$).

- Ο δεύτερος τρόπος είναι μέσω μίας επιστροφής στην κατάσταση 1 ακολουθώντας ένα μονοπάτι 3 μεταβάσεων ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).
- Ο τρίτος είναι μέσω μίας ανακύκλωσης της μετάβασης στην κατάσταση 5, είτε κατευθείαν από την κατάσταση 7 ($5 \rightarrow 7 \rightarrow 5$) με 2 μεταβάσεις, είτε μέσω της κατάστασης 6 ($5 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5$) με 3 μεταβάσεις.

Άρα συνολικά τα μεγέθη των μονοπατιών θα είναι:

$$3 + 3k + 2m + 3n, \quad k, m, n \geq 0$$

Όπου k ο αριθμός των φορών που περνάμε περνάμε από την κατάσταση 1 ξανά, m ο αριθμός των φορών που πηγαίνουμε στην 5 κατευθείαν από την 7 και n ο αριθμός των φορών που πηγαίνουμε στην 5 μέσω της 6.

Άρα, τελικά, $r_{1,5}(n) > 0$ για $n = 3$ ή $n > 5$.

- γ) • Από τις καταστάσεις 1, 2, 3 μπορούμε να μεταβούμε με μη μηδενική πιθανότητα σε κάθε άλλη κατάσταση, άρα
 $A(1) = A(2) = A(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- Από τις καταστάσεις 4, 5, 6, 7 μπορούμε να μεταβούμε με μη μηδενική πιθανότητα μόνο στις καταστάσεις 5, 6, 7. Οπότε έχουμε:
 $A(4) = A(5) = A(6) = A(7) = \{5, 6, 7\}$
- δ) Κοιτώντας τον γράφο, βλέπουμε ότι οι καταστάσεις 5, 6, 7 είναι έμμονες, καθώς δεν μπορούμε να μεταβούμε σε κάποια άλλη κατάσταση από αυτές, όμως επικοινωνούν μεταξύ τους. Από την άλλη, βλέπουμε πως οι καταστάσεις 1, 2, 3, 4 είναι μεταβατικές, αφού μετά την μετάβαση $4 \rightarrow 5$ δεν μπορούμε να επιστρέψουμε σε οποιαδήποτε από τις 1, 2, 3, 4.
- Το σύστημα επίσης είναι απεριοδικό. Αυτό φαίνεται αν εξετάσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μεταβούμε από την κατάσταση 5 στον εαυτό της. Αυτή η μετάβαση μπορεί να γίνει με δύο βήματα ($5 \rightarrow 7 \rightarrow 5$) ή με τρία ($5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5$), δηλαδή μπορούμε να μεταβούμε από την 5 στον εαυτό της μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 2$.
- ε) Αφού οι καταστάσεις 5, 6, 7 επικοινωνούν μόνο μεταξύ τους και όχι με καμία άλλη κατάσταση, αποτελούν μία κλάση επικοινωνίας. Αυτό δεν ισχύει για τις 1, 2, 3, καθώς οι καταστάσεις μίας κλάσης επικοινωνίας πρέπει να είναι έμμονες.
- στ) Για την μετατροπή όλης της αλυσίδας σε μία κλάση επικοινωνίας αρκεί να προσθέσουμε μία μετάβαση από οποιαδήποτε από τις 5, 6, 7 προς οποιαδήποτε από τις 1, 2, 3. Για παράδειγμα, μία μετάβαση με μη μηδενική πιθανότητα από την 7 προς την 2.

Άσκηση 2

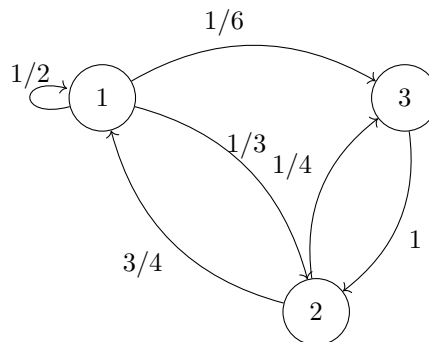
Θεωρήστε την αλυσίδα με τον εξής πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- α) Σχεδιάστε την αλυσίδα, χαρακτηρίστε τις καταστάσεις της ως έμμονες ή μεταβατικές και βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας.
- β) Βρείτε την πιθανότητα να καταλήξουμε στην κατάσταση 3 ξεκινώντας από την 1 σε 2 βήματα.
- γ) Βρείτε τον πίνακα $\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$
- δ) Ποια είναι η στατική κατανομή της αλυσίδας;

Λύση

α) Η αλυσίδα που αναπαριστά ο πίνακας είναι η εξής:



Παρατηρούμε πως μπορούμε να πάμε από οποιαδήποτε κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη, άρα οι καταστάσεις αποτελούν όλες μία κλάση επικοινωνίας, το οποίο επίσης σημαίνει πως είναι και όλες τους έμμονες καταστάσεις.

β) Χρειαζόμαστε την πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 3 σε τρία βήματα, δηλαδή την $r_{1,3}(3)$, μπορούμε να την υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, αλλά μπορούμε και να την πάρουμε από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης 3ης τάξης, δηλαδή την τρίτη δύναμη του $\mathbf{P}$. Άρα έχουμε:

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 9/16 & 1/4 & 3/16 \\ 3/8 & 1/2 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Και βλέπουμε από τον πίνακα πως $r_{1,3}(2) = \frac{1}{6}$.

γ) Για να βρούμε τον $\mathbb{P}$ μπορούμε να υπολογίσουμε πολύ μεγάλες δυνάμεις του $\mathbf{P}$ και να παρατηρήσουμε τις τιμές στις οποίες τείνουν τα στοιχεία του, όμως μία (σχετικά) πιο εύκολη διαδικασία είναι να διαγωνιοποιήσουμε τον $\mathbf{P}$.

Αρχικά θα βρούμε τις ιδιοτιμές του $\mathbf{P}$, λύνοντας το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & -\lambda & 1/4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow -\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}\lambda(2\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \lambda \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot (\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Και βλέπουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης, άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 1$.

Έπειτα, βρίσκουμε τον μηδενόχωρο του $\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}$ για κάθε λ που βρήκαμε παραπάνω, και προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{P}$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε πλέον να εκφράσουμε το $\mathbf{P}$ ως το παρακάτω γινόμενο πινάκων:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4/3 & 1/3 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Όπου ο πίνακας $\mathbf{D}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων. Έχοντας πλέον διαγωνιοποιήσει τον $\mathbf{P}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες της διαγωνιοποίησης για να υπολογίσουμε τον $\mathbb{P}$, οπότε:

$$\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Lambda}^n \cdot \mathbf{D}^{-1}$$

Και υπολογίζοντας το όριο για το Λ και πολλαπλασιάζοντάς το με τα D , D^{-1} έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^n = \begin{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

δ) Για να υπολογίσουμε την στατική κατανομή π του $\mathbf{P}$ πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$$

$$1 = \sum_{k=1}^3 \pi_k$$

Ας αναπτύξουμε πρώτα την πάνω έκφραση:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 + 0 \cdot \pi_3 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + 0 \cdot \pi_2 + \pi_3 \\ \pi_1 = \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + 0 \cdot \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{3} + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{\pi_1}{6} + \frac{\pi_2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{3} + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{\pi_1}{6} + \frac{\pi_1}{12} + \frac{\pi_3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{3} + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{\pi_3}{4} + \frac{2\pi_1}{12} + \frac{\pi_1}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{3} + \pi_3 \\ \frac{3\pi_3}{4} = \frac{\pi_1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{3} + \pi_3 \\ 3\pi_3 = \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = \frac{3\pi_3}{3} + \pi_3 \\ 3\pi_3 = \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\pi_1}{2} + \frac{3\pi_2}{4} \\ \pi_2 = 2\pi_3 \\ 3\pi_3 = \pi_1 \end{array} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τα π_1 , π_2 στην δεύτερη έκφραση καταλήγουμε ότι:

$$\pi = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right]$$

Έχουμε πλέον τη στατική κατανομή της αλυσίδας, και σαν μικρό bonus μπορούμε να παρατηρήσουμε την εξής ενδιαφέρουσα σχέση:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα 6 καταστάσεων $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

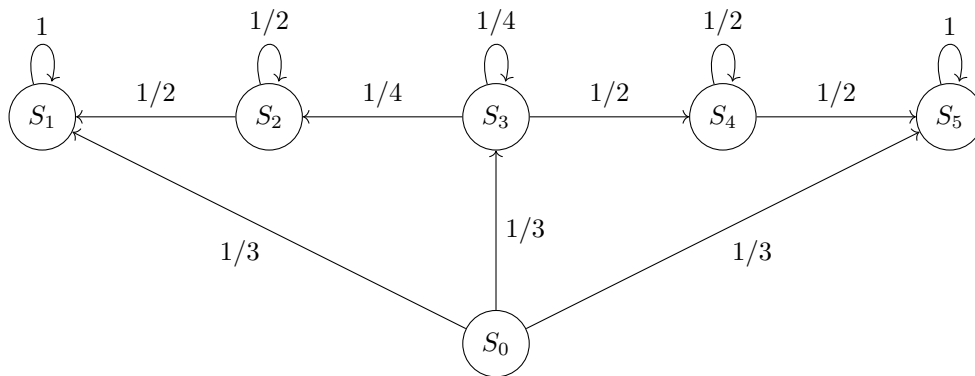
α) Σχεδιάστε την αλυσίδα.

β) Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινάει από την κατάσταση S_0 , υπολογίστε:

- Την πιθανότητα το σύστημα να επισκεφτεί την S_2 για πρώτη φορά μετά από k βήματα.
- Την πιθανότητα το σύστημα να επισκεφτεί την S_2 και να την εγκαταλείψει την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή.
- Την πιθανότητα το σύστημα να επισκεφτεί την S_1 για πρώτη φορά μετά από 3 βήματα.
- Την πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί στην S_3 αμέσως μετά στην n -οστή χρονική στιγμή.

Λύση

α) Το διάγραμμα μεταβάσεων της αλυσίδας είναι το εξής:



β) Δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση S_0 έχουμε:

- Έστω το γεγονός $A_k = \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_2 \text{ για πρώτη φορά την στιγμή } k\}$. Παρατηρούμε πως ο μόνος τρόπος να μεταβούμε από την S_0 στην S_2 είναι μέσω της S_3 ($S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$). Αυτό σημαίνει πως ο ελάχιστος αριθμός βημάτων για βρεθούμε στην S_2 είναι 2, ακόμη, σημαίνει πως ο μόνος τρόπος για να αυξήσουμε τον αριθμό των μεταβάσεων είναι μέσω της μετάβασης από την S_3 στον εαυτό της, το οποίο πρέπει να γίνει $k - 2$ φορές. Άρα έχουμε:

$$P(A_k) = p_{2,3} \cdot p_{3,3}^{k-2} \cdot p_{3,2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

- Έστω το γεγονός:

$B = \{\text{Επισκεπτόμαστε την κατάσταση } S_2 \text{ για πρώτη φορά και την εγκαταλείπουμε στο επόμενο βήμα}\}$

Το B όμως μπορεί να γραφτεί ως η τομή των γεγονότων $\Gamma_1 = \{\text{Μεταβαίνουμε στην } S_2 \text{ για πρώτη φορά}\}$ και $\Gamma_2 = \{\text{Από την } S_2 \text{ μεταβαίνουμε στην } S_1\}$ οπότε έχει την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P(\Gamma) &= P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = P(\Gamma_1) \cdot P(\Gamma_2) = \left[\sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) \right] \cdot p_{2,1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}^{k-1} \right] = \frac{1}{6} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4}^{k-1} \right] = \frac{1}{6} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}^{k+1} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{18} \end{aligned}$$

Την πιθανότητα για το Γ_1 την εξάγαμε ως εξής. Τα γεγονότα A_k ουσιαστικά σημαίνουν ότι φτάνουμε στην S_2 για πρώτη φορά μετά από k βήματα και παρατηρούμε πως είναι ανεξάρτητα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε έπειτα πως το να μεταβούμε στην S_2 για πρώτη φορά είναι το να μεταβούμε σε αυτή μετά από 2 βήματα ή μετά από 3 βήματα ή μετά από 4 κ.λ.π. δηλαδή είναι η ένωση όλων των (ανεξάρτητων) A_k .

iii) Για να γίνει αυτό, πρέπει να πραγματοποιήσουμε την εξής ακολουθία μεταβάσεων:

$$S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P(\Gamma) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

iv) Για να συμβεί αυτό το γεγονός, πρέπει το σύστημα να επισκεφτεί την S_3 την πρώτη χρονική στιγμή, και έπειτα να παραμείνει σε αυτή τις επόμενες $n-1$ χρονικές στιγμές, δηλαδή η πιθανότητα είναι η:

$$P(IV) = p_{0,3} \cdot p_{3,3}^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}^{n-1}, \quad n \geq 1$$

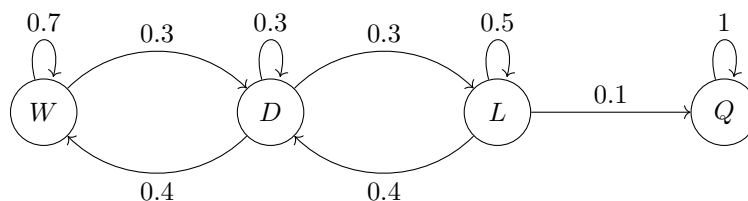
Άσκηση 4

Οι προπονητές μίας ομάδας ποδοσφαίρου έχουν παρατηρήσει πως η απόδοσή της επηρεάζεται άμεσα από την ψυχολογική κατάσταση των παικτών της, συγκεκριμένα το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού εξαρτάται αποκλειστικά από το αποτέλεσμα του προηγούμενου παιχνιδιού με τον εξής τρόπο: Αν η ομάδα κερδίσει ένα παιχνίδι τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.7 ή φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3. Αν φέρει ισοπαλία σε ένα παιχνίδι τότε θα κερδίσει το επόμενο με πιθανότητα 0.4, θα ξαναφέρει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3 ή θα το χάσει με πιθανότητα 0.3. Αν χάσει ένα παιχνίδι τότε θα χάσει το επόμενο με πιθανότητα 0.5, θα φέρει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4 ή θα απογοητευτεί εντελώς και θα παρατήσει την σεζόν με πιθανότητα 0.1.

- Βρείτε την Μαρκοβιανή Αλυσίδα η οποία περιγράφει την απόδοση της ομάδας και έχει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό καταστάσεων, σχεδιάστε την και γράψτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
- Χαρακτηρίστε τις καταστάσεις της παραπάνω αλυσίδας ως μεταβατικές ή έμμονες.
- Αν το αποτέλεσμα του πρώτου παιχνιδιού ήταν ισοπαλία, βρείτε την πιθανότητα η ομάδα να έχει παρατήσει την σεζόν μετά το τρίτο παιχνίδι. Έπειτα υπολογίστε την ίδια πιθανότητα, θεωρώντας όμως πως η ομάδα είχε κερδίσει το πρώτο παιχνίδι και συγκρίνετε τις δύο πιθανότητες.
- Σε κάποια φάση οι προπονητές αποφασίζουν πως δεν θα επιτρέπουν στην ομάδα να σταματήσει να παίζει, οπότε πλέον η ομάδα όταν χάνει σε ένα παιχνίδι θα χάσει και το επόμενο με πιθανότητα 0.7. Βρείτε σε βάθος χρόνου ποιο ποσοστό των παιχνιδιών που παίζει θα χάνει μετά από αυτή την αλλαγή

Λύση

- Η αλυσίδα με τον ελάχιστο αριθμό καταστάσεων είναι αυτή η οποία μεταβαίνει από το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού στο αποτέλεσμα του επόμενου και έχει, άρα, τέσσερις καταστάσεις: $\{Νίκη(N), Ισοπαλία(D), Ηττα(L), Παραίτηση(Q)\}$. Ο γράφος της αλυσίδας έχει την εξής μορφή:



Με τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} W & D & L & Q \end{matrix} \\ \begin{matrix} W \\ D \\ L \\ Q \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- β) Από τον γράφο της αλυσίδας παρατηρούμε πως οι W, L, D είναι μεταβατικές, ενώ η μόνη έμμονη κατάσταση είναι η Q.
- γ) Έστω X_n το αποτέλεσμα του n-οστού παιχνιδιού. Για να τα παρατήρει η ομάδα μετά το τρίτο παιχνίδι πρέπει $X_3 = L$, οπότε σε κάθε μία από τις δυο περιπτώσεις να βρούμε την πιθανότητα να καταλήξουμε σε ήττα μετά από δύο παιχνίδια και να την πολλαπλασιάσουμε με την πιθανότητα να μεταβούμε από ήττα σε παραίτηση. Αρχικά θα βρούμε τις πιθανότητες μετάβασης σε δύο βήματα, οι οποίες είναι:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.3 & 0.09 & 0 \\ 0.4 & 0.33 & 0.24 & 0.03 \\ 0.16 & 0.32 & 0.37 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Και με την βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$P(X_4 = Q | X_1 = D) = r_{D,L}(2) \cdot p_{L,Q} = 0.24 \cdot 0.1 = 0.024$$

Και:

$$P(X_4 = Q | X_1 = W) = r_{W,L}(2) \cdot p_{L,Q} = 0.09 \cdot 0.1 = 0.009$$

Οπότε βλέπουμε ότι η πιθανότητα να παραιτηθεί η ομάδα δεδομένου ότι το πρώτο παιχνίδι έληξε με ισοπαλία είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να παραιτηθεί δεδομένου ότι κέρδισε το πρώτο παιχνίδι.

- δ) Μετά από αυτή τη μεταβολή, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα είναι ο εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε την πιθανότητα να χάσει ένα παιχνίδι σε βάθος χρόνου, πρέπει να βρούμε την στατική κατανομή της αλυσίδας, δηλαδή να λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \pi \cdot \mathbf{P} \\ 1 &= \sum_{i=1}^3 \pi_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_1 &= 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.3\pi_2 + 0.7\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned} \right\}$$

Λύνοντας τις πρώτες εξισώσεις καταλήγουμε ότι $\pi_2 = \pi_3 = \frac{3\pi_1}{4}$ οπότε έχουμε:

$$\pi = [0.4, 0.3, 0.3]$$

Άρα μετά την αλλαγή των προπονητών, η ομάδα θα χάνει 30% των παιχνιδιών που παίζει.

Άσκηση 5

Μία εταιρία χρειάζεται N υπάλληλους για να μπορέσει να λειτουργήσει. Αν ένας υπάλληλος αρρωστήσει, τότε η εταιρία τον απολύει και προσλαμβάνει έναν καινούριο. Κάθε καινούριος υπάλληλος χρειάζεται μία εβδομάδα εκπαίδευσης για να μπορέσει να μάθει την δουλειά του και να ξεκινήσει να δουλεύει στην εταιρία. Ο χρόνος μετριέται σε εβδομάδες.

- α) Έστω ότι στην αρχή της n-οστής εβδομάδας δουλεύουν (δηλαδή δεν είναι υπό εκπαίδευση) X_n υπάλληλοι, εκ των οποίων μέχρι το τέλος στη n-οστή εβδομάδα θα έχουν αρρωστήσει οι Y_n . Δείξτε ότι στην αρχή της n+1-στής εβδομάδας θα δουλεύουν $X_{n+1} = N - Y_n$ υπάλληλοι.
- β) Υποθέστε πως κάθε υπάλληλος αρρωσταίνει ανεξάρτητα από κάθε άλλο με πιθανότητα p . Δείξτε ότι:

$$P(Y_n = y | X_n = x) = \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}, \quad y = 0, 1, \dots, x$$

- γ) Δείξτε ότι τα (X_n) παρουσιάζουν την μαρκοβιανή ιδιότητα και βρείτε την γενική μορφή των πιθανοτήτων μετάβασης $p_{i,j}$.
- δ) Βρείτε τις εξισώσεις ισορροπίας της αλυσίδας.
- ε) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός των υπαλλήλων που δουλεύουν ανά εβδομάδα στην εταιρεία;

Λύση

- α) Αρχικά ας υποθέσουμε πως $Y_n = 0$. Αν δεν αρρωστήσει κανένας υπάλληλος κατά την διάρκεια της n -οστής εβδομάδας, τότε μέχρι την αρχή της $n+1$ εβδομάδας θα έχουν τελειώσει την εκπαίδευσή τους οι υπάλληλοι οι οποίοι αντικαθιστούν όλους όσους αρρώστησαν την $n-1$ -στή εβδομάδα, άρα $X_{n+1} = N$ σε αυτή την περίπτωση. Τώρα αν $Y_n \neq 0$, αρκεί να αφαιρέσουμε από τους υπαλλήλους στην αρχή της $n+1$ εβδομάδας όσους αρρώστησαν την n -οστή, δηλαδή όντως:

$$X_{n+1} = N - Y_n$$

- β) Το ερώτημα είναι σχετικά εύκολο. Ξέρουμε πως ο μέγιστος αριθμός υπαλλήλων που μπορούν να αρρωστήσουν σε μία εβδομάδα είναι x και αφού κάθε υπάλληλος αρρωσταίνει ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους με την ίδια πιθανότητα, αναγνωρίζουμε πως όντως το πλήθος αυτών που θα αρρωστήσουν στη διάρκεια μίας εβδομάδας θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πιθανότητα p και παράμετρο x .
- γ) Γνωρίζουμε ότι το Y_n εξαρτάται μόνο από το X_n και όχι από τα $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$. Αυτό σημαίνει πως $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_1, X_{n-2} = i_2, \dots) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, δηλαδή όντως οι (X_n) παρουσιάζουν την μαρκοβιανή ιδιότητα.
Θέλουμε επίσης να βρούμε ποιές είναι οι πιθανότητες $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \forall i, j$. Αρχικά, αν $X_n = i$, τότε $Y_n \leq i$, οπότε $X_{n+1} \geq N - i$, δηλαδή οι μόνες τιμές για τις οποίες $p_{i,j} > 0$ είναι οι $j = N - i, \dots, N$. Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(Y_n = N - j | X_n = i)$ και από το δεύτερο ερώτημα βλέπουμε πως οι $p_{i,j}$ θα είναι:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{N-j} p^{N-j} (1-p)^{i-N+j}, & j = N-i, \dots, N \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots$$

- δ) Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned} \pi(j) &= \sum_{i=0}^N \pi(i) p_{i,j} \\ &= \sum_{i=N-j}^N \pi(i) \binom{i}{N-i} p^{N-i} (1-p)^{i-N+j} \end{aligned}$$

- ε) Αυτό μπορεί να γίνει χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, κυρίως γιατί δεν έχουν μία εύκολα διαχειρίσιμη μορφή.
Αντ' αυτού, υποθέτουμε πως το X_0 ήδη βρίσκεται στη στατική του κατανομή π , το οποίο σημαίνει πως το X_n θα έχει στατική κατανομή για κάθε n . Αυτό επίσης σημαίνει πως $E[X_n] = \mu$ είναι ανεξάρτητη της τιμής του n . Αν $X_n = x$, $Y_n \sim \Delta(x, p)$ οπότε $E[Y_n | X_n = x] = px$ και από τον νόμο της ολικής μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$E[Y_n] = \sum_{x=0}^N px P(X_n = x) = p \cdot E[X_n] = p\mu$$

Και έχουμε:

$$X_{n+1} = N - Y_n \Rightarrow E[X_{n+1}] = N - E[Y_n] \Rightarrow \mu = N - p\mu \Rightarrow \mu = \frac{N}{1+p}$$

Και άρα έχουμε τον μέσο αριθμό υπαλλήλων που δουλεύουν στην εταιρεία, συναρτήσει του αριθμού υπαλλήλων που χρειάζεται για να δουλεύει κανονικά, καθώς και της πιθανότητας ένας υπάλληλος να αρρωστήσει