

Ορισμός:

Στοχαστικός Πίνακας (Stochastic Matrix): Ένας τετραγωνικός

πίνακας $\underline{P}$, διαστάσεων $m \times m$, με:

- μη αρνητικά στοιχεία, $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, m$
- Τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζονται στη μονάδα

$$\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

ονομάζεται στοχαστικός πίνακας (ή πίνακας Markov).

* Μετάφραση: Ο πιν. πιθαν. μεταβάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι στοχαστικός πίνακας

Θεώρημα 1: Αν $\underline{P}_k$ ($k = 1, \dots, n$) είναι στοχαστικοί πίνακες της ίδιας διάστασης, τότε το γινόμενο $\underline{P} = \prod_{k=1}^n \underline{P}_k$ είναι στοχαστικός πίνακας.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για $n=2$.

Έστω $\underline{Q}, \underline{R}$ δύο στοχαστικοί πίνακες. Διάστασης $m \times m$, $\underline{P} = \underline{Q} \underline{R}$.

Έχουμε:

$$P_{ij} = \sum_{v=1}^m q_{iv} r_{vj}$$

$$\text{και} \quad \sum_{j=1}^m P_{ij} = \sum_j \sum_v q_{iv} r_{vj} = \sum_v \sum_j q_{iv} r_{vj}$$

$$= \sum_v q_{iv} \underbrace{\sum_j r_{vj}}_1$$

$$= \sum_v q_{iv} \cdot 1 \quad [\underline{R}: \text{στοχαστικός}]$$

$$= 1 \quad [\underline{Q}: \text{στοχαστικός}]$$

Πρόταση: Αν ο πίνακας $\underline{P}$ είναι στοχαστικός, τότε και ο πίνακας $\underline{P}^n$ είναι στοχαστικός

* Μετάφραση: Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων n -στής τάξης (σε n βήματα) μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι στοχαστικός.

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

$$r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m r_{ik}^{(n-1)} \cdot P_{kj} \quad (\underline{P}^{(n)})_{ij} = r_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)}$$

$r_{ij}^{(n)} = (\underline{P}^{(n)})_{ij}$: Οι π.δ. μετ. n-βήα τάξης δίνονται από τα στοιχεία του πίνακα: $\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^n$

γράφονται ως

$$\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^{(n-1)} \underline{P} = \underline{P}^{n-1} \cdot \underline{P} \quad \text{Προδρομικές (forward) εξ. C-K.}$$

Επίσης, $r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m P_{ik} r_{kj}^{(n-1)}$

$$\underline{P}^{(n)} = \underline{P} \cdot \underline{P}^{(n-1)} = \underline{P} \underline{P}^{n-1} \quad \text{Οπισθοδρομικές (backward) εξ. C-K.}$$

Γενικότερα $r_{ij}^{(n_1+n_2)} = \sum_{k=1}^m r_{ik}^{(n_1)} r_{kj}^{(n_2)}$

$$\underline{P}^{(n_1+n_2)} = \underline{P}^{(n_1)} \cdot \underline{P}^{(n_2)} = \underline{P}^{n_1+n_2}$$

Η κατανομή καταστάσεων σε χρόνο n:

$$\underline{\pi}^{(n)} = \underline{\pi}^{(0)} \cdot \underline{P}^n$$

Θεώρημα 2: Κάθε στοιχαστικός πίνακας $\underline{P}$ έχει τη μονάδα (α=1) ως ιδιοτιμή με αντίστοιχο (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα το

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [1, 1, \dots, 1]^T, \quad \text{δηλαδή } \underline{P} \cdot \underline{e} = 1 \cdot \underline{e}$$

Απόδειξη: $\underline{P} \cdot \underline{e} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m P_{1j} \\ \sum_j P_{2j} \\ \vdots \\ \sum_j P_{mj} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{δίδει } \underline{P} \text{ στοιχαστικός}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{e}$

Θεώρημα 3 : Οι ιδιοτιμές λ_j του στοχαστικού πίνακα $\underline{P}$ έχουν μέτρο μικρότερο ή ίσο της μονάδας : $|\lambda_j| \leq 1 \quad \forall j=1, \dots, m$

Απόδειξη:

Έστω λ μία οποιαδήποτε ιδιοτιμή του $\underline{P}$ με ιδιοδιάνυσμα το $\underline{u} \neq 0$: $\underline{P}\underline{u} = \lambda \underline{u}$

Έστω τώρα $u_{\max}$ η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή συνιστώσα του $\underline{u}$: $|u_{\max}| = \max \{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_m|\}$

Τότε, αναφερόμενοι στην max συνιστώσα του $\underline{u}$, θα έχουμε ότι ο δείκτης του $\underline{u}$ που αντιστοιχεί στη max συνιστώσα

$$\begin{aligned} \underline{P}\underline{u} = \lambda \underline{u} &\Rightarrow |\lambda u_{\max}| = \left| \sum_{j=1}^m p_{ij} u_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |p_{ij} u_j| = \sum_{j=1}^m p_{ij} |u_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^m p_{ij} |u_{\max}| = |u_{\max}| \underbrace{\sum_{j=1}^m p_{ij}}_1 = |u_{\max}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\lambda u_{\max}| \leq |u_{\max}|$$

$$\therefore |\lambda| \leq \frac{|u_{\max}|}{|u_{\max}|} = 1$$

$$\therefore |\lambda| \leq 1. \quad \square$$

Θεώρημα 4. Έστω $\underline{P}$ στοχαστικός πίνακας $m \times m$ με m διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i , $i=1, 2, \dots, m$, με $\lambda_1 = 1$ (Θεώρημα 3) και $|\lambda_i| < 1$ για $i=2, 3, \dots, m$. Τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\Pi}^{(0)} \cdot \underline{P}^n = \underline{\Pi} \quad \text{όπου} \quad \underline{\Pi} = [\pi_1, \dots, \pi_m]$$

είναι το μοναδικό (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα του $\underline{P}$ με

$$\text{ιδιοτιμή } \lambda=1 : \underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \underline{P}.$$

Απόδειξη: Καθώς ο $\underline{P}$ έχει m διαφορετικές ιδιοτιμές,

μπορεί να διαγωνισιοποιηθεί καθώς έχει n γραμμικά ανεξάρτητα
μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα.

Έστω $\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$ ο διαγώνιος πίνακας με τις
ιδιοτιμές του $\underline{P}$ διατεταγμένες

έτσι ώστε $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_m$ με $|\lambda_i| < 1$ $i=2, \dots, m$.

Έστω $\underline{U} = [\underline{u}_1 | \underline{u}_2 | \dots | \underline{u}_m]$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων
που αντιστοιχούν στις $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του $\underline{P}$.

Συνεπώς $\underline{u}_1 = \underline{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ καθώς είναι το ιδιοδιάνυσμα με $\lambda=1$.

Τότε, $\underline{P} = \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{U}^{-1}$ και $\underline{P}^n = \underline{U} \underline{\Lambda}^n \underline{U}^{-1}$

Έχουμε, $\underline{\Pi}^{(n)} = \underline{\Pi}^{(0)} \underline{P}^n = \underline{\Pi}^{(0)} \underline{U} \underline{\Lambda}^n \underline{U}^{-1}$

Θέτουμε $\underline{b} = \underline{\Pi}^{(0)} \underline{U} \Rightarrow [b_1, b_2, \dots, b_m] = [\underline{\Pi}^{(0)} \underline{u}_1, \dots, \underline{\Pi}^{(0)} \underline{u}_m]$

Δηλαδή b_i είναι η προβολή της αρχικής κατανομής $\underline{\Pi}^{(0)}$ στο
 i -στό ιδιοδιάνυσμα του $\underline{P}$: $b_i = \underline{\Pi}^{(0)} \cdot \underline{u}_i$.

$$\therefore \underline{\Pi}^{(n)} = [b_1, b_2, \dots, b_m] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Pi}^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1 \lambda_1^n & & 0 \\ & b_2 \lambda_2^n & \\ 0 & & \ddots \\ & & & b_m \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_m \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\Pi}^{(n)} = b_1 \lambda_1^n \underline{v}_1 + b_2 \lambda_2^n \underline{v}_2 + \dots + b_m \lambda_m^n \underline{v}_m, \text{ όπου}$$

$\underline{v}_i$ είναι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του $\underline{P}$: $\underline{v}_i \underline{P} = \lambda_i \underline{v}_i$

$$\lambda_1 = 1, |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1, \dots, |\lambda_m| < 1 \text{ και}$$

$$\underline{b}_1 = \underline{\Pi}^{(0)} \cdot \underline{u}_1 = \underline{\Pi}^{(0)} \cdot \underline{e} = \sum_{j=1}^m \Pi_j^{(0)} = 1 \text{ αφού } \underline{\Pi}^{(0)} \text{ είναι μία κατανομή}$$

$\therefore$ Καθώς $|\lambda_i| < 1$ για $i=2, \dots, m$ έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n = 0, \quad i=2, \dots, m$$

Συνεπώς οι όροι $b_i \lambda_i^n \underline{v}_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ για $i=2, 3, \dots, m$.

$$\text{Επίσης } b_1 \lambda_1^n \underline{v}_1 = 1 \cdot 1^n \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1$$

Τελικά $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\Pi}^{(n)} = \underline{v}_1$ όπου $\underline{v}_1$ (η πρώτη γραμμή των $\underline{u}^{-1}$)

είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα των $\underline{P}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=1$: $\underline{v}_1 \underline{P} = 1 \cdot \underline{v}_1$. Το διάνυσμα που ικανοποιεί την σχέση αυτή το έχουμε ονομάσει οριακή (στατική) κατανομή της αλυσίδας με πινάκα πιθαν. μετ. των $\underline{P}$.

Συνεπώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\Pi}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\Pi}^{(0)} \underline{P}^n = \underline{\Pi} \text{ όπου } \underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \underline{P}$$

Ερώτημα: Με ποια ταχύτητα γίνεται η σύγκλιση των $\underline{\Pi}^{(n)}$ στο $\underline{\Pi}$?

Απάντηση: Από τη σχέση

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}^{(n)} &= b_1 \lambda_1^n \underline{v}_1 + b_2 \lambda_2^n \underline{v}_2 + \dots + b_m \lambda_m^n \underline{v}_m \\ &= \underline{\Pi} + b_2 \lambda_2^n \underline{v}_2 + \dots + b_m \lambda_m^n \underline{v}_m \end{aligned}$$

φάνηκε ότι η σύγκλιση γίνεται με γεωμετρική ταχύτητα (λ_2^n) η οποία καθορίζεται από την ιδιοτιμή λ_2 , τη μέγιστη κατά μέτρο ιδιοτιμή μετὰ των $\lambda_i (=1)$.

(6)

Επίσης, $\underline{\underline{P}}^n = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Lambda}}^n \underline{\underline{U}}^{-1}$

$$= [\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_m] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_m \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\underline{P}}^n = \lambda_1^n \underline{u}_1 \underline{v}_1 + \lambda_2^n \underline{u}_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_m^n \underline{u}_m \underline{v}_m$$

$$\therefore \boxed{\underline{\underline{P}}^n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \underline{u}_i \underline{v}_i}$$

όπου $\underline{u}_i$: δεξιά ιδιοδιάνυσμα του $\underline{\underline{P}}$ με ιδιοτιμή λ_i $\underline{\underline{P}} \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$
δύναμη

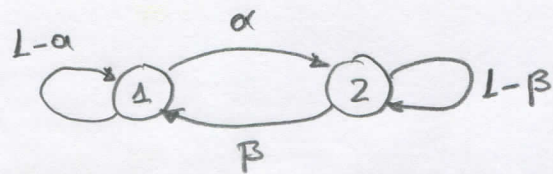
$\underline{v}_i$: αριστερά ιδιοδιάνυσμα (γραμμή) του $\underline{\underline{P}}$ με
 ιδιοτιμή λ_i $\underline{v}_i \underline{\underline{P}} = \lambda_i \underline{v}_i$.

Παράδειγμα:

7

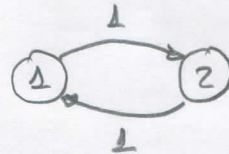
Έστω η αλυσίδα με πίνακα πιθαν. μεταβάσεων τον

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$



Θέλουμε να αναλύσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτής της αλυσίδας.

• Αν $\alpha=\beta=1$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



Η αλυσίδα μεταπηδά σε κάθε βήμα από την κατάσταση 1 στην 2 ή από την 2 στην 1. Σε άρτιο αριθμό βημάτων βρίσκεται πάντα στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε, ενώ σε περιττό αριθμό βημάτων βρίσκεται στην άλλη κατάσταση. Περιοδική αλυσίδα με $d=2$. ο P έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$.

$$|P - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-1.$$

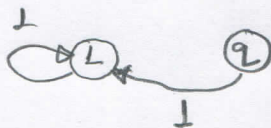
Δεν υπάρχει οριακή κατανομή για αυτή την αλυσίδα.

• Αν $\alpha=\beta=0$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



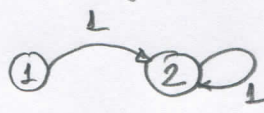
Η αλυσίδα θα βρίσκεται πάντα στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε: ①, ② : απορροφητικές καταστάσεις.

• Αν $\alpha=0, \beta=1$



2: μεταβατική
1: απορροφητική

• Αν $\alpha=1, \beta=0$



1: μεταβατική
2: απορροφητική

• $0 < \alpha, \beta < 1$

$$P\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow |P - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = 0$$

$$1-\beta-\lambda - \alpha + \alpha\beta + \alpha\lambda - \lambda + \beta\lambda + \lambda^2 - \alpha\beta = 0$$

$$\lambda^2 - (2-\alpha-\beta)\lambda + (1-\alpha-\beta) = 0$$

$$(Ax^2 + Bx + \Gamma = 0 \rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \Delta = B^2 - 4A\Gamma)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= (2-\alpha-\beta)^2 - 4(1-\alpha-\beta) = 4 + \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 4\beta + 2\alpha\beta - 4 + 4\alpha + 4\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{2-\alpha-\beta \pm (\alpha+\beta)}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1-\alpha-\beta \end{cases}$$

• Για $\lambda_1 = 1$: $\underline{P}\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)u_{11} + \alpha u_{21} = u_{11} \\ \beta u_{11} + (1-\beta)u_{21} = u_{21} \end{cases} \Rightarrow u_{11} = u_{21} \stackrel{\text{Εξίσωση 1}}{=} 1$$

$$\therefore \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}$$

• Για $\lambda_2 = 1-\alpha-\beta$: $\underline{P}\underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = (1-\alpha-\beta) \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)u_{12} + \alpha u_{22} = (1-\alpha-\beta)u_{12} \\ \beta u_{12} + (1-\beta)u_{22} = (1-\alpha-\beta)u_{22} \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_{12} - \alpha u_{12} + \alpha u_{22} = u_{12} - \alpha u_{12} - \beta u_{12} \Rightarrow u_{22} = -\frac{\beta}{\alpha} u_{12}$$

Εξίσωση $u_{12} = \alpha$. Τότε $u_{22} = -\beta$, συνεπώς

$$\therefore \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Τελικά

$$\underline{U} = [\underline{u}_1 | \underline{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}^{-1} = -\frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{-1}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δείξει ότι:

$$\begin{aligned} \underline{P}^n &= \underline{U} \underline{\Lambda}^n \underline{U}^{-1} = \lambda_1^n \underline{u}_1 \underline{v}_1 + \lambda_2^n \underline{u}_2 \underline{v}_2 \\ &= 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta/(a+\beta) & a/(a+\beta) \end{bmatrix} + (1-a-\beta)^n \begin{bmatrix} a \\ -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(a+\beta) & -1/(a+\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta}{a+\beta} & \frac{a}{a+\beta} \\ \frac{\beta}{a+\beta} & \frac{a}{a+\beta} \end{bmatrix} + (1-a-\beta)^n \begin{bmatrix} \frac{a}{a+\beta} & \frac{-a}{a+\beta} \\ \frac{-\beta}{a+\beta} & \frac{\beta}{a+\beta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

* Πρώτη παρατήρηση: Καθώς $|1-a-\beta| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-a-\beta)^n = 0$ και

επομένως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{a+\beta} & \frac{a}{a+\beta} \\ \frac{\beta}{a+\beta} & \frac{a}{a+\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\pi} \\ \underline{\pi} \end{bmatrix} \quad \text{όπου, όπως δείχνει,}$$

$$\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{a+\beta} & \frac{a}{a+\beta} \end{bmatrix} = \underline{v}_1 \quad \text{η οριακή κατανομή} \quad \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \underline{P}!$$

Συνεχίζοντας:

$$\underline{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{\beta + a(1-a-\beta)^n}{a+\beta} & \frac{a - a(1-a-\beta)^n}{a+\beta} \\ \frac{\beta - \beta(1-a-\beta)^n}{a+\beta} & \frac{a + \beta(1-a-\beta)^n}{a+\beta} \end{bmatrix}$$

Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως:

- ① Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά στην κατάσταση 2, με ποια πιθανότητα θα βρεθείται στην κατάσταση 2 μετά από 5 βήματα?
- $$P(X_5=2 \mid X_0=2) = r_{22}(5) = \left(\underline{P}^5 \right)_{22} = \frac{a + \beta(1-a-\beta)^5}{a+\beta}$$

- ② Αν η αρχική κατανομή της αλυσίδας είναι $\underline{\pi}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ με ποια πιθανότητα το σύστημα θα βρεθείται στην κατάσταση 1 μετά από 7 βήματα?

Γνωρίζουμε ότι $\underline{\pi}^{(n)} = \underline{\pi}^{(0)} \cdot \underline{P}^n \Rightarrow$

$$\pi_1^{(7)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^7}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta - \beta(1-\alpha-\beta)^7}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}$$

πρώτη στήλη του $\underline{P}^7$

$$\therefore \pi_1^{(7)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^7}{\alpha+\beta} + \frac{\beta - \beta(1-\alpha-\beta)^7}{\alpha+\beta} \right) \quad \square$$

Εφαρμογή των παραπάνω: Μία εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων έχει γραφεία στο LA και στο SF. Ένας πελάτης ενοικιάζει το αυτοκίνητο την αρχή της εβδομάδας σε κάποια από τις 2 πόλεις και το επιστρέφει το τέλος της εβδομάδας σε οποιαδήποτε πόλη επιθυμεί (χωρίς έξτρα χρέωση). Η εταιρία κρατά στατιστικά στοιχεία και έχει υπολογίσει τον ακόλουθο πίνακα:

"Το αυτοκίνητο επιστρέφεται στο"

	LA	SF
"Το αυτοκίνητο ενοικιάζεται στο" LA	0.8	0.2
SF	0.3	0.7

Η εταιρία διαθέτει συνολικά 1000 αυτοκίνητα τα οποία αρχικά κατανέμονται από 500 σε κάθε πόλη.

- Ποια η κατανομή των αυτοκινήτων μετά από 7 εβδομάδες?
σε βάθος χρόνου ($n \rightarrow \infty$)?

-11-

Έχουμε ότι $\underline{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$

$\therefore \alpha = 0.2, \beta = 0.3$

• Συνεπώς $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta = 1 - 0.2 - 0.3 = 0.5 = \frac{1}{2}$

(11)

• Η οριακή κατανομή είναι

$$\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.3}{0.2+0.3} & \frac{0.2}{0.2+0.3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\pi} = [0.6 \quad 0.4]$$

Συνεπώς σε βάθος χρόνου θα βρισκόμαστε περί τα 600 αυτοκίνητα στο LA και 400 στο SF.

• Η κατανομή μετά από 7 εβδομάδες.

$$\underline{\pi}^{(7)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \underline{P}^7$$

$$\underline{P}^7 = \begin{bmatrix} \frac{0.3+0.2(1-0.2-0.3)^7}{0.2+0.3} & \frac{0.2-0.2(1-0.2-0.3)^7}{0.2+0.3} \\ \frac{0.3-0.3(1-0.2-0.3)^7}{0.2+0.3} & \frac{0.2+0.3(1-0.2-0.3)^7}{0.2+0.3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0.3+0.2 \cdot 0.5^7}{0.5} & \frac{0.2-0.2 \cdot 0.5^7}{0.5} \\ \frac{0.3-0.3 \cdot 0.5^7}{0.5} & \frac{0.2+0.3 \cdot 0.5^7}{0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6031 & 0.3969 \\ 0.5953 & 0.4047 \end{bmatrix}$$

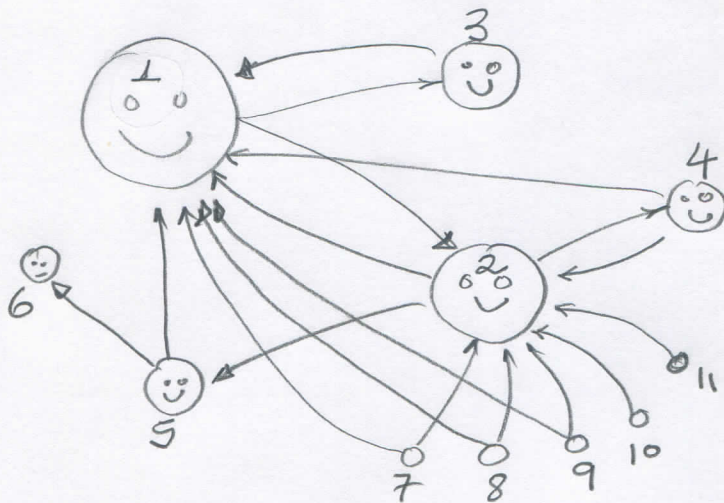
$$\therefore \underline{\pi}^{(7)} = [\pi_1^{(7)} \quad \pi_2^{(7)}] = [0.5992 \quad 0.4008]$$

Επομένως μετά από 7 εβδομάδες τα αυτοκίνητα κατανέμονται ήδη περίπου: 600 στο LA και 400 στο SF.

Ο PAGE RANK αλγόριθμος των Brin & Page (12)

Δηλώνεται ένας γραφός των οποίων οι κόμβοι είναι όλοι οι διατεθειμένες ιστοσελίδες στον ιστό. Οι ακμές όλοι οι συνδέσμοι που δείχνουν από μια ιστοσελίδα στην άλλη.

Ένας "τυχαίος χρήστης" random surfer βεργάρεται τυχαία ξεκινώντας από κάπου, πατώντας σε συνδέσμους τυχαία πλησιάζοντας και βγαίνει σε βελίδα. Το "page rank" μιας βελίδας αντιστοιχεί στο ποσοστό των χρόνων που ο τυχαίος χρήστης θα περάσει σε αυτή τη βελίδα, υποθέτοντας ότι βεργάρεται επί άπειρον.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		1/2	1/2								
2	1/3			1/3	1/3						
3	1										
4	1/2	1/2									
5	1/2					1/2					
6											
7	1/2	1/2									
8	1/2	1/2									
9	1/2	1/2									
10		1									
11		1									

Χώρος Καταστάσεων i : Το σύνολο των δυνατών ιστοσελίδων του ιστού
 $i=1, \dots, n$

Έστω q_i το πλήθος των συνδέσμων (hyperlinks) που φεύγουν από τη βελίδα i . Στο σχήμα $q_1=2, q_2=3, q_3=1, \dots$

Έστω πίνακας $\underline{P}$ με $P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{q_i} & \text{αν υπάρχει σύνδεσμος } i \rightarrow j \\ 0 & \text{αν δεν υπάρχει } i \rightarrow j \end{cases}$

Η τιμή P_{ij} ερμηνεύεται ως εξής: ^{είναι} Η πιθανότητα ο τυχαίος χρήστης να μεταφερθεί από τη βελίδα i στην j πατώντας τυχαία ένα από τα links της βελίδας i .

Το pagerank score, π_j , μιας σελίδας j δίδεται από τη λύση των εξισώσεων ισορροπίας:

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} \underline{P} \Rightarrow \pi_j = \sum_{i \in K} \pi_i P_{ij}$$

όπου K : το σύνολο των σελίδων που δείχνουν στην j ($P_{ij} > 0$).

Δηλαδή, το pagerank score μιας σελίδας j ισούται με το άθροισμα των pagerank scores, π_i , των σελίδων εκείνων, i , οι οποίες "δείχνουν" την j , κλιμακωμένων με την πιθανότητα μετάβασης από την i στην j .

"Μια ιστοσελίδα είναι γημαντική αν τη δείχνουν άλλες γημαντικές σελίδες"

Όπως βλέπαμε στην παραπάνω εξίσωση, τρεις παράγοντες επηρεάζουν το pagerank score, π_j , της σελίδας j :

- Το πλήθος των εισερχόμενων υπερσυνδέσμων (δηλαδή ο πληθυσμός του K , $K \uparrow \Rightarrow \pi_j \uparrow$)
- Το πλήθος των εξερχόμενων συνδέσμων, q_i , των σελίδων i που δείχναν την j (το λεγόμενο "link propensity": $q_i \uparrow \Rightarrow P_{ij} = \frac{1}{q_i} \downarrow \Rightarrow \pi_j \downarrow$)
- Το pagerank score, π_i , των σελίδων i που δείχναν στην j ($\pi_i \uparrow \Rightarrow \pi_j \uparrow$).

Δύο προβλήματα για το βασικό μοντέλο:

- ① Η ύπαρξη "βεγίδων αδιέξοδο" (dangling nodes) που δεν έχουν κανέναν υπερδόνδεδο προς άλλη βεγίδα και "εγκλωβίζουν" τον τυχαίο χρήστη εκεί. Π.χ. κόμβος #6 στο γράφο της βεγίδας 12. Για αυτούς τους κόμβους (κατωστάτους) ο πίνακας $\underline{P}$ έχει μηδενικές γραμμές (όλα τα στοιχεία της 6-ης γραμμής του $\underline{P}$ είναι 0).

Λύση: Αντικαθίστανται αυτές οι μηδενικές γραμμές με ένα διάνυσμα (γραμμή) που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη κατανομή $\underline{v} = \frac{1}{m} [1, 1, \dots, 1]$ όπου m το πλήθος των ιστοβεγίδων.

Δηλαδή, ο χρήστης αν βρεθεί σε ένα τέτοιο κόμβο, μεταπηδά σε μια τυχαία επιλεγμένη βεγίδα.

Ονομάζουμε $\underline{S}$ το νέο αυτό πίνακα.

- ② Ο χρήστης ^{"απορροφάται"} εγκλωβίζεται σε μια (από τις πολλές) κλίμακες επικοινωνίας των γράφων, ένα "bucket of the web graph", ένα υποάνοχο βεγίδων που επικοινωνούν μεταξύ τους αλλά όχι με το υπόλοιπο web.

Λύση των Brin & Page: Αντικαθιστάμε τον πίνακα $\underline{S}$ με τον

$$\underline{G} = \alpha \underline{S} + (1-\alpha) \underline{E}$$

→ δημιουργείται ένας "strongly connected γράφος"

όπου $\underline{E}$: "teleportation" matrix ("Beam me up, Scotty"!!).

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \underline{e} & & \\ & \frac{1}{m} \underline{e} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{m} \underline{e} \end{bmatrix}$$

και α : "damping factor" ~ 0.85
* Με π.δ. $1-\alpha$, ο χρήστης επιλέγει μια νέα βεγίδα μέσω της γραμμής διαδρομών του browser (URL line).