ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 09/03/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 21/03/2005

Άσκηση 1.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P &= P\{2 \text{ αφίξεις σε } (0,s) \mid 2 \text{ αφίξεις σε } (0,1)\} \\ &= P\{2 \text{ αφίξεις σε } (0,s), 0 \text{ αφίξεις σε } (s,1)\}/(e^{-\lambda}\lambda^2/2) \\ &= \left[e^{-\lambda s}(\lambda s)^2/2\right]\left[e^{-(1-s)\lambda}\right]\Big/\left(e^{-\lambda}\lambda^2/2\right) \\ &= s^2 = 1/9, \text{ όταν } s = 1/3 \end{aligned}$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P &= 1 - P\{\text{και οι δύο έφθασαν στα τελευταία 40 λεπτά}\} \\ &= 1 - (2/3)^2 \\ &= 5/9 \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Από γνωστό αξίωμα προκύπτει ότι ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν μεταξύ 8 και 10 φορές έχει την ίδια κατανομή με τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν 2 φορές. Άρα, έχουμε Poisson τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή ίση με 6. Οπότε:

(α) $P\{N(10) - N(8) = 0\} = e^{-6}$

(β) $E[N(10) - N(8)] = 6$

(γ) Από δύο γνωστά αξιώματα προκύπτει ότι από οποιαδήποτε χρονική στιγμή και έπειτα η διαδικασία των γεγονότων που συμβαίνουν είναι μια Poisson διαδικασία με ρυθμό λ. Επομένως, η αναμενόμενη ώρα του πέμπτου γεγονότος μετά τις 2 το απόγευμα είναι: $2 + E[S_5] = 2 + 5/3$, δηλαδή 3:40 το απόγευμα.

Άσκηση 3.

(α) Η πιθανότητα να μην περάσουν τρένα σε 3 μέρες είναι η πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ αφίξεων να είναι μεγαλύτερος του 3, και άρα η πιθανότητα ισούται με: $e^9 = 0.000123$.

(β) Τα γεγονότα: κανένα τρένο δεν φθάνει τις 2 πρώτες μέρες και 4 τρένα φθάνουν την τέταρτη μέρα, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Επομένως, η πιθανότητα να συμβούν τα 2 γεγονότα είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους, δηλαδή: $e^{-6} \cdot e^{-3}\frac{3^4}{4!} = 4.165 \cdot 10^{-4}$.

(γ) Η πιθανότητα ότι το πέμπτο τρένο δεν έχει φθάσει την δεύτερη μέρα είναι η πιθανότητα ότι το άθροισμα των 5 πρώτων χρόνων μεταξύ αφίξεων είναι μεγαλύτερο του 2. Και άρα ισούται με την πιθανότητα ότι υπάρχουν το πολύ 4 αφίξεις τις 2 πρώτες ημέρες. Οπότε:

$$P\left(\text{το πολύ 4 αφίξεις σε 2 ημέρες}\right) = e^{-6}\left(1 + 6 + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}\right) = 0.2851$$

Άσκηση 4.

(α) Οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων κατανέμονται εκθετικά. Δηλαδή $T_n \sim \alpha e^{-\alpha t}$ και $T_m \sim \beta e^{-\beta t}$, όπου T_n είναι ο χρόνος της πρώτης άφιξης της $\{N_t\}$ διαδικασίας και T_m είναι ο χρόνος της πρώτης άφιξης της $\{M_t\}$ διαδικασίας. Οπότε:

$$\begin{aligned} P(T_1 < T_2) &= \int_0^\infty P(T_2 > T_1 \mid T_1 = t)\, \alpha e^{-\alpha t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha t} dt \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

(β) Όταν μια άφιξη συμβαίνει, αυτή προέρχεται από την πρώτη Poisson διαδικασία με πιθανότητα ίση με $\alpha/(\alpha+\beta)$ ενώ το γεγονός μια άφιξης είναι ανεξάρτητο από την μια άφιξη στην επόμενη. Συνεπώς, η πιθανότητα ότι και οι τρεις αφίξεις προέρχονται από την ίδια διαδικασία είναι ίση με:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^3$$

(γ) Η πιθανότητα ότι $N = n$ είναι η πιθανότητα ότι από τις πρώτες $n+3$ αφίξεις, οι n προέρχονται από την πρώτη διαδικασία και η $(n+4)$ άφιξη προέρχεται από την δεύτερη διαδικασία. Συνεπώς:

$$p_N(n) = \binom{n+3}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^4 \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^4, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση 5.

(α) Ο αριθμός των ανθρώπων που φθάνουν μέσα σε μια ώρα ακολουθεί την κατανομή Poisson με ρυθμό λ και αναμενόμενη τιμή ίση με λ.

(β) Αν οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων για τα λεωφορεία είναι εκθετικά κατανεμημένοι, τότε οι αναχωρήσεις λεωφορείων σχηματίζουν μια Poisson διαδικασία με ρυθμό μ. Άρα, ο αριθμός των αναχωρήσεων μέσα σε μια ώρα έχει μια Poisson συνάρτηση πιθανότητας με παράμετρο μ.

(γ) Ενώνουμε δύο ανεξάρτητες Poisson διαδικασίες και προκύπτει μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\mu + \lambda$. Επομένως, ο αναμενόμενος αριθμός των "γεγονότων" που θα συμβούν σε μια ώρα είναι $\mu + \lambda$.

(δ) Ο αριθμός των ανθρώπων που περιμένουν άγει ορισμένη πληροφορία για τον χρόνο από την τελευταία αναχώρηση. Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας την απώλειας μνήμης της εκθετικής κατανομής, ο αριθμός αυτός είναι ανεξάρτητος του χρόνου έως την επόμενη αναχώρηση. Άρα, ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής είναι απλώς $1/\mu$, ανεξαρτήτως του πλήθους των ανθρώπων που περιμένουν.

(ε) Κάθε γεγονός στο πρακτορείο έχει πιθανότητα $\lambda/(\lambda+\mu)$ να είναι άφιξη επιβάτη ('αποτυχία') και πιθανότητα $\mu/(\lambda+\mu)$ να είναι άφιξη λεωφορείου ('επιτυχία'). Επιπλέον, διαφορετικά γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Ο αριθμός των επιβατών σε ένα λεωφορείο είναι ίσος με τον αριθμό των αποτυχιών εώς την πρώτη επιτυχία και είναι κατανεμημένος ως $K-1$, όπου K είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\mu/(\lambda+\mu)$. Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των επιβατών σε ένα λεωφορείο θα είναι:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right), \quad k = 0, 1, \ldots$$