

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/04/20045

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/04/2005

Άσκηση 1. Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με επτά καταστάσεις έχει τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0.5, & (i, j) = (3, 2), (3, 4), (5, 6), (5, 7) \\ 1, & (i, j) = (1, 3), (2, 1), (4, 5), (6, 7), (7, 5) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω X_k η κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη χρονική στιγμή k .

(α) Δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Για ποιες τιμές του n έχουμε θετικές πιθανότητες μετάβασης n -στής τάξης από την κατάσταση 1 στην 5, $r_{15}(n) = P(X_n = 5/X_0 = 1) > 0$;

(γ) Βρείτε το σύνολο $A(i)$ των καταστάσεων που είναι προσιτές από την κατάσταση i για κάθε $i = 1, 2, \dots, 7$.

(δ) Βρείτε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση, αποφασίστε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή απεριοδική.

(ε) Ποιος ο ελάχιστος αριθμός μεταβάσεων με μη μηδενική πιθανότητα που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα ώστε και οι επτά καταστάσεις να αποτελούν μία μοναδική κλάση επικοινωνίας;

Άσκηση 2. Θεωρείστε την αλυσίδα Markov η οποία περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

(α) Ποιες είναι οι μεταβατικές, έμμονες και περιοδικές καταστάσεις της αλυσίδας;

(β) Ποιες είναι οι κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας;

(γ) Υπολογίστε τις $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{41}(n)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{66}(n)$.

Άσκηση 3. Ο Τάσος πηγαίνει κάθε πρωί στη δουλειά του στη μεγάλη πόλη! Όταν φεύγει από το σπίτι του, είναι εξίσου πιθανό να βγει είτε από την μπρος είτε από την πίσω πόρτα. Ομοίως όταν επιστρέφει στο σπίτι, είναι εξίσου πιθανό να μπει είτε από την μπρος είτε από την πίσω πόρτα. Ο Τάσος κατέχει πέντε ζευγάρια παπούτσια τα οποία και βγάζει με το που επιστρέφει στο σπίτι και τα οποία αφήνει στην πόρτα από την όπου μπήκε. Αν δεν υπάρχουν παπούτσια στην πόρτα από την οποία βγαίνει, πηγαίνει ξυπόλιτος στη δουλειά. Μας ενδιαφέρει να καθορίσουμε το ποσοστό του χρόνου που ο Τάσος πηγαίνει ξυπόλιτος στη δουλειά.

(α) Ορίστε την κατάλληλη αλυσίδα Markov, τις καταστάσεις της καθώς και τις πιθανότητες μετάβασης.

(β) Ποια η οριακή πιθανότητα που ο Τάσος πηγαίνει ξυπόλιτος στη δουλειά;

Βοήθεια: Θεωρείστε μόνο τον αριθμό των ζευγαριών των παπουτσιών σε μία από τις δύο πόρτες (π.χ. την μπροστινή.)