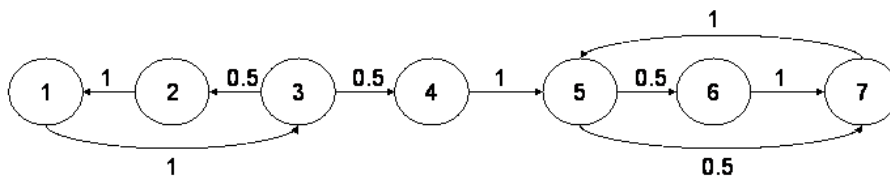


**Άσκηση 1.**

(α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το εξής:

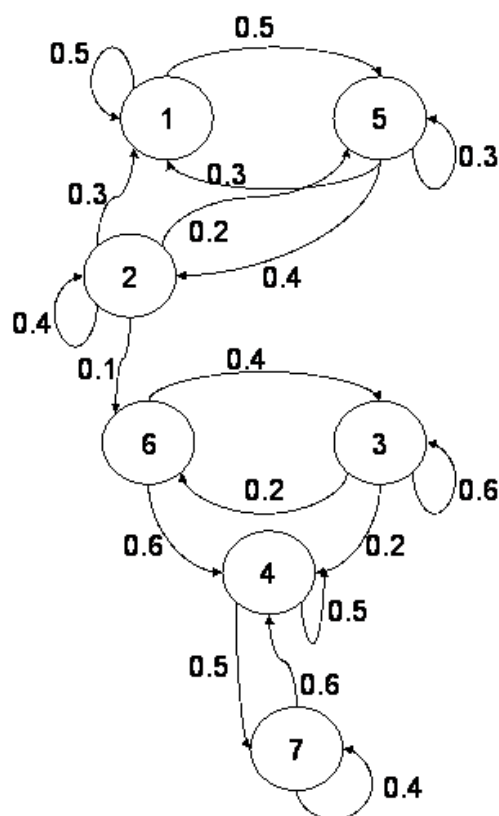


Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1

- (β) Από την κατάσταση 1 περνάμε στη κατάσταση 5 μέσω τουλάχιστον τριών μεταβάσεων. Τα μονοπάτια από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 επίσης περιλαμβάνουν μονοπάτια με ανακύκλωση από την κατάσταση 1 πίσω στην 1 (μεγέθους 3) ή/και μονοπάτια με ανακύκλωση από την κατάσταση 5 πίσω στην 5 μέσω της κατάστασης 7 (είτε μεγέθους 2 ή μεγέθους 3). Επομένως, τα δυνατά μεγέθη μονοπατιών είναι:  $3 + 2m + 3n$ , για  $m, n \geq 0$ . Άρα,  $r_{15}(n) > 0$  για  $n = 3$  ή  $n \geq 5$ .
- (γ) Από τις καταστάσεις 1, 2 και 3 μπορούμε να μεταβούμε σε όλες τις άλλες καταστάσεις διότι υπάρχει ένα μονοπάτι μη μηδενικής πιθανότητας από αυτές τις καταστάσεις μέσω της κατάστασης 3 σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Από τις καταστάσεις 4, 5, 6 και 7 υπάρχουν μόνο μονοπάτια προς τις καταστάσεις 5, 6 και 7.

- (δ) Οι καταστάσεις 5 – 7 είναι περιοδικές διότι λόγω της λογικής της απάντησης στο (γ) ερώτημα μπορούμε να φθάσουμε σε αυτές από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οι καταστάσεις 1 – 4 είναι μεταβατικές διότι μόλις το σύστημα μεταβεί σε καταστάσεις μετά από την κατάσταση 4 δεν μπορεί να επιστρέψει σε κάποια άλλη κατάσταση εκτός από τις καταστάσεις 5, 6 και 7. Οι καταστάσεις 5, 6 και 7 σχηματίζουν μια κλάση επικοινωνίας. Επειδή μπορεί να διασχιστεί από την κατάσταση 5 πίσω στην 5 σε 2 ή 3 βήματα, το σύστημα μπορεί να επιστρέψει στην κατάσταση 5 έπειτα από  $n$  βήματα για οποιοδήποτε  $n \geq 2$ . Επομένως, το σύστημα είναι απεριοδικό.
- (ε) Μια μετάβαση πρέπει να προστεθεί για την δημιουργία μιας μοναδικής κλάσης επικοινωνίας: για παράδειγμα, προσθέτοντας μια μετάβαση από την κατάσταση 5 στην κατάσταση 1 θα επιτρέπαμε την μετάβαση σε κάθε κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οποιαδήποτε μετάβαση από την κλάση επικοινωνίας των καταστάσεων 5, 6 και 7 σε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις 1, 2 ή 3 θα πετύχαινε τον ίδιο στόχο.

**Άσκηση 2.** Έστω  $i, i = 1, \dots, 7$  να δηλώνει τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Από την γραφική αναπαράσταση του πίνακα μετάβασης μπορεί εύκολα να αντιληφθεί κανείς τα εξής:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2

- (α) Οι  $\{4, 7\}$  είναι περιοδικές και οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές.
- (β) Υπάρχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας που σχηματίζεται από τις μεταβατικές καταστάσεις.
- (γ) Εφόσον δεν μπορούμε να μεταβούμε στην κατάσταση 1 από την 4,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{41}(n) = 0$ . Εφόσον η 6 είναι μεταβατική κατάσταση,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{66}(n) = 0$ .

**Άσκηση 3.**

- (α) Σημειώστε ότι θέλουμε να παρακολουθήσουμε τον αριθμό των ζευγαριών των παπουτσιών στην μπροστινή (ή στην πίσω) πόρτα. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θα παρακολουθήσουμε τον αριθμό των παπουτσιών στην μπροστινή πόρτα. Ορίζουμε την κατάσταση  $X_k$  του Τάσου ως τον αριθμό των παπουτσιών στην μπροστινή πόρτα στο ξεκίνημα της  $k$ -στης μέρας. Οπότε, η κατάσταση  $X_{k+1}$  θα εξαρτάται από την  $X_k$  και από τις πόρτες που χρησιμοποιεί ο Τάσος για να βγει έξω (να πάει στην δουλειά) και για να μπει μέσα (γυρνώντας από τη δουλειά). Έστω ΜΠ να δηλώνει το γεγονός ότι χρησιμοποιεί την μπροστινή πόρτα για να βγει έξω για να πάει στη δουλειά και την πίσω για να μπει μέσα μετά τη δουλειά. Ορίζουμε με ανάλογο τρόπο και τα γεγονότα ΜΜ, ΠΜ, ΠΠ. Οπότε είναι εύκολο να ειπωθεί ότι για  $i = 1, 2, 3, 4$  ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i + 1 | X_k = i) &= P(\text{ΠΜ}) \\ P(X_{k+1} = i - 1 | X_k = i) &= P(\text{ΜΠ}) \\ P(X_{k+1} = i | X_k = i) &= P(\text{ΜΜ}) + P(\text{ΠΠ}) \end{aligned}$$

Για  $i = 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i + 1 | X_k = i) &= P(\text{ΠΜ}) \\ P(X_{k+1} = i | X_k = i) &= 1 - P(\text{ΠΜ}) \end{aligned}$$

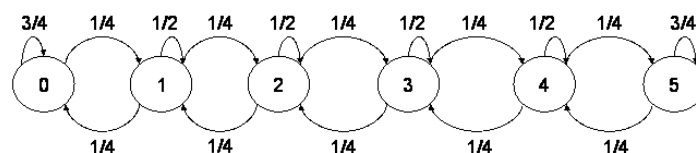
Παρόμοια, για  $i = 5$  έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i - 1 | X_k = i) &= P(\text{ΜΠ}) \\ P(X_{k+1} = i | X_k = i) &= 1 - P(\text{ΜΠ}) \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι:  $P(\text{ΜΜ}) = P(\text{ΜΠ}) = P(\text{ΠΜ}) = P(\text{ΠΠ}) = 1/4$ . Η επακόλουθη Μαρκοβιανή διαδικασία είναι μια διαδικασία γέννηση-θανάτου με  $b_i = 1/4$  για  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  και  $d_i = 1/4$  για  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Όπως έχει διδαχθεί, οι εξισώσεις ισορροπίας για τις πιθανότητες σταθερών καταστάσεων απλοποιούνται σε:

$$\pi_i b_i = \pi_{i+1} d_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης  $\sum_i \pi_i = 1$ . Η λύση στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 3

δίδεται από τον τύπο:  $\pi_i = \frac{b_0 b_1 \dots b_i}{d_1 d_2 \dots d_{i+1}} = \pi_0$ , το οποίο συνεπάγεται ότι  $\pi_i = 1/6, i = 0, \dots, 5$ .

- (β) Ο Τάσος αφήνει το σπίτι ξυπόλυτος όταν δεν υπάρχουν παπούτσια στην μπροστινή πόρτα (κατάσταση 0) και φεύγει από την μπροστινή πόρτα (με πιθανότητα  $1/2$ ), ή όταν έχει 5 ζευγάρια παπουτσιών στην μπροστινή πόρτα και φεύγει από την πίσω πόρτα (με πιθανότητα  $1/2$ ). Το μακρυπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου στην κατάσταση 0 ή στην κατάσταση 5 είναι  $1/6$ , χρησιμοποιώντας τη μετάφραση μακρυπρόθεσμης συχνότητας για πιθανότητες σταθερών καταστάσεων για μια μη περιοδική μοναδική κλάση επικοινωνίας. Επομένως, το μακρυπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου (δηλ. οριακή πιθανότητα), σε μέρες, που ο Τάσος πηγαίνει στη δουλειά ξυπόλυτος είναι:  $(1/2)(1/6) + (1/2)(1/6) = 1/6$ .