

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/05/20045

Ημερομηνία Παράδοσης: 13/06/2005

Άσκηση 1. Η Λίζα είναι επί του παρόντος στην τάξη 6-1. Για κάθε μέρα που είναι στην 6-1, την επομένη μέρα θα είναι επίσης στην 6-1 με πιθανότητα $1/2$. Αλλιώς, θα μεταπηδήσει σε μία από τις τάξεις 6-2, 6-3, 9, ή 15, με ίσες πιθανότητες. Για κάθε μέρα που είναι στην 6-3, την επομένη μέρα αλλάζει στην 9 με πιθανότητα $1/4$, στην 6-1 με πιθανότητα $3/8$ και στην 6-2 με πιθανότητα $3/8$. Για κάθε μέρα που είναι στην 6-2, την επομένη μέρα αλλάζει στην 15 με πιθανότητα $1/2$, στην 6-1 με πιθανότητα $3/8$ και στην 6-3 με πιθανότητα $1/8$. Αν αφήσει την τάξη 6 (δηλαδή τις 6-1, 6-2, ή 6-3) δεν θα ξαναεπιστρέψει σε αυτή. Αν αλλάξει στην 9, θα μείνει για πάντα σε αυτή. Τέλος, αν αλλάξει στην 15, θα μείνει για πάντα σε αυτή.

(α) Δώστε το γράφημα αυτής της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ποιες είναι οι μεταβατικές, οι έμμονες και οι καταστάσεις απορροφήσεως; Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Λίζα θα φύγει τελικά από την τάξη 6;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Λίζα θα βρεθεί τελικά στην τάξη 15;

(γ) Ποιος ο μέσος αριθμός ημερών μέχρις ότου η Λίζα εγκαταλείψει τη τάξη 6;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε τους τύπους για τις πιθανότητες απορροφήσεως και τους μέσους χρόνους απορροφήσεως.

Άσκηση 2. Θεωρείστε μία ακολουθία από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας ίση με $1/4$. Έστω T το γεγονός ότι για πρώτη φορά έρχεται επιτυχία αμέσως μετά από επιτυχία, δηλαδή

$$T = \min\{n | X_n = X_{n-1} = \text{επιτυχία}\}.$$

Βρείτε την μέση τιμή $E[T]$.

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με τρεις καταστάσεις, τις F, S, και SS (αποτυχία, επιτυχία και διαδοχικές επιτυχίες για πρώτη φορά, αντίστοιχα.)

Άσκηση 3. Θεωρείστε την αλυσίδα Markov με καταστάσεις $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ η οποία περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Ποιες είναι οι έμμονες και μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας; Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και αν είναι περιοδικές ή όχι.

(β) Υπάρχουν οι οριακές (στάσιμες) πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Ποιες είναι αυτές;

(γ) Υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Ποιες είναι αυτές;

(δ) Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1 αλλά ξεκινάμε να την παρατηρούμε αφού έχει μπει σε steady-state. (i) Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα στην επόμενη μετάβαση. (ii) Βρείτε την δεσμευμένη πιθανότητα ότι η διαδικασία βρισκόταν στην κατάσταση 2 όταν αρχίσαμε να την παρατηρούμε, δεδομένου ότι η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα στην πρώτη μετάβαση που παρατηρήσαμε. (iii) Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα στην πρώτη αλλαγή κατάστασης που παρατηρήσαμε.

(ε) Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4. (i) Για κάθε κλάση επικοινωνίας, βρείτε την πιθανότητα ότι τελικά η διαδικασία θα καταλήξει σε αυτή. (ii) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων έως την πρώτη μετάβαση του συστήματος σε μία κλάση επικοινωνίας;

Άσκηση 4. Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.). Ορίζουμε τις τ.μ. Y_1 και Y_2 ως

$$Y_1 = 2X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_1 - X_2.$$

Βρείτε τις $E[Y_1]$, $E[Y_2]$, $cov(Y_1, Y_2)$ και την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_{Y_1, Y_2} .

Άσκηση 5. Οι τ.μ. X και Y έχουν την εξής από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = ce^{-8x^2-6xy-18y^2}.$$

Βρείτε τις μέσες τιμές, τις διασπορές, και το συντελεστή συσχέτισης των X και Y . Επίσης, βρείτε τη σταθερά c .