ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

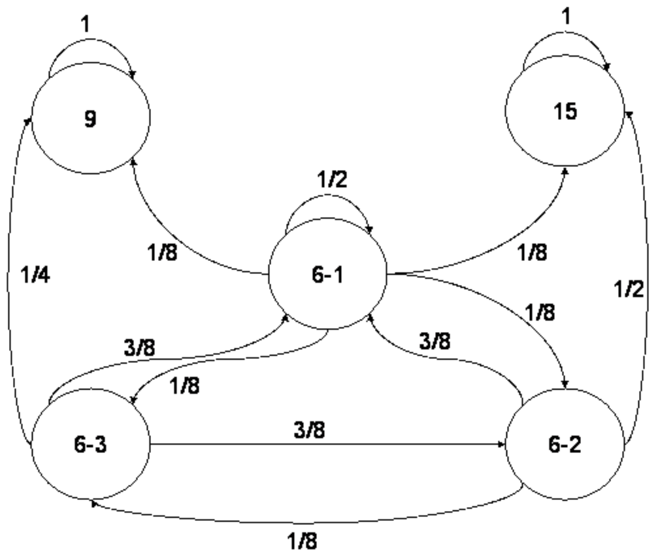
ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/05/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 13/06/2005

Άσκηση 1.

(α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το εξής:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1

Επιθεωρώντας το παραπάνω διάγραμμα, οι καταστάσεις $6-1, 6-2$, και $6-3$ είναι όλες μεταβατικές, αφού κάθε μια από αυτές έχει μονοπάτι που οδηγεί είτε στην κατάσταση 9 ή στη κατάσταση 15. Οι τελευταίες δύο καταστάσεις είναι απορροφητικές διότι δεν υπάρχει επιστροφή από αυτές. Επομένως, η Λίζα εν τέλει αφήνει την τάξη 6 με πιθανότητα 1.

(β) Αυτή είναι απλώς η πιθανότητα απορροφήσεως για την έμμονη κλάση που αποτελείται από την κατάσταση της τάξης 15. Έστω ότι δηλώνουμε την πιθανότητα να απορροφηθούμε από την κατάσταση 15 υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i ως a_i. Τότε θέτοντας υπό όρους και την επόμενη κατάσταση και χρησιμοποιώντας το Ολικό Θεώρημα Πιθανότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
a_{15} &= 1 \\
a_9 &= 0 \\
a_{6-1} &= \frac{1}{2}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{15} + \frac{1}{8}a_{6-2} + \frac{1}{8}a_9 + \frac{1}{8}a_{6-3} \\
a_{6-2} &= \frac{1}{2}a_{15} + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{6-3} \\
a_{6-3} &= \frac{1}{4}a_9 + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{3}{8}a_{6-2}
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχουμε:

$$a_{6-1} = \frac{105}{184} \approx 0.571$$

Επίσης, για τα άλλα a_i προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
a_{6-2} &= 0.77717 \\
a_{6-3} &= 0.50543
\end{aligned}$$

(γ) Ο μέσος αριθμός ημερών αντιστοιχεί στον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την απορρόφηση για την μεταβατική κατάσταση $6-1$. Έστω μ_i ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την απορρόφηση με την προϋπόθεση ότι είμαστε στην κατάσταση i. Τότε θέτοντας υπό όρους και την επόμενη κατάσταση και χρησιμοποιώντας το Ολικό Θεώρημα Πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mu_{15} &= 0 \\
\mu_9 &= 0 \\
\mu_{6-1} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{15} + \frac{1}{8}\mu_{6-2} + \frac{1}{8}\mu_9 + \frac{1}{8}\mu_{6-3} \\
\mu_{6-2} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_{15} + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{6-3} \\
\mu_{6-3} &= 1 + \frac{1}{4}\mu_9 + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{3}{8}\mu_{6-2}
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

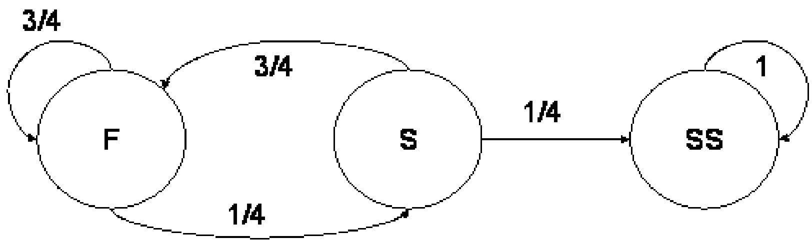
$$\mu_{6-1} = \frac{162}{46} = \frac{81}{23} \approx 3.522$$

Άσκηση 2. Επιλύουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας που απεικονίζεται στην εικόνα 2. Η κατάσταση S δηλώνει επιτυχία, η F δηλώνει αποτυχία και η SS είναι μια απορροφητική κατάσταση που δηλώνει το γεγονός ότι το πείραμα τελειώνει όταν πάρουμε δύο επιτυχίες στη σειρά. Ορίζουμε την T' ως το χρόνο από την πρώτη προσπάθεια μέχρι που η ακολουθία SS συμβαίνει για πρώτη φορά. Τότε $T = T' + 1$ και $E[T] = E[T'] + 1$. Έπειτα, υπολογίζουμε τους $t_S = E[T' \mid X_0 = S], t_F = E[T' \mid X_0 = F]$ δηλαδή τους αναμενόμενους χρόνους μέχρι την απορρόφηση αρχίζοντας από τις καταστάσεις S και F αντίστοιχα. Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
t_S &= \frac{3}{4} \cdot (t_F + 1) + \frac{1}{4} \cdot 1 \\
t_F &= \frac{3}{4} \cdot (t_F + 1) + \frac{1}{4} \cdot (t_S + 1)
\end{aligned}$$

παίρνουμε ότι: $t_S = 16, t_F = 20$. Επομένως, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
E[T] &= E[T'] + 1 \\
&= E[T' \mid X_0 = F]P(X_0 = F) + E[T' \mid X_0 = S]P(X_0 = S) + 1 \\
&= 20
\end{aligned}$$



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2

Άσκηση 3.

(α) Οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές ενώ όλες οι άλλες είναι περιοδικές. Υπάρχουν δύο κλάσεις επικοινωνίας. Η κλάση $\{1, 2, 3\}$ είναι μη περιοδική και η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική.

(β) Αν η διαδικασία αρχίσει από την κατάσταση 1, θα μείνει στην μη περιοδική κλάση επικοινωνίας $\{1, 2, 3\}$ και οι πιθανότητες μετάβασης $n-$βημάτων θα συγκλίνουν στις στάσιμες πιθανότητες π_i. Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν την εξής μορφή:

$$\pi_1 = \pi_2 \qquad \pi_2 = 6\pi_3$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε τελικά ότι:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{6}{13} \qquad \pi_3 = \frac{1}{13}$$

(γ) Επειδή η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική, δεν υπάρχουν οριακές πιθανότητες. Ειδικά, η ακολουθία $r_{66}(n)$ εναλλάσσεται μεταξύ 0 και 1 και δεν συγκλίνει.

(δ) (i) Η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνει κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης ισούται με:

$$0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 = \frac{18}{65}$$

(δ) (ii) Η πιθανότητα ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 2 και ότι η κατάσταση αυξάνει είναι:

$$0.1\pi_2 = \frac{0.6}{13}$$

(δ) (iii) Αν η κατάσταση είναι η 1 (πιθανότητα 6/13), είναι βέβαιο ότι θα αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης που θα παρατηρήσουμε. Αν η κατάσταση είναι η 2 (πιθανότητα 6/13), τότε έχει πιθανότητα 1/6 να αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης που θα παρατηρήσουμε. Επιπλέον, αν η κατάσταση είναι η 3, αυτή δεν μπορεί να αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης που θα παρατηρηθεί. Επομένως, η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνει κατά την πρώτη παρατηρούμενη αλλαγή κατάστασης είναι ίση με:

$$\frac{6}{13} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$$

(ε) (i) Έστω a_4 και a_5 οι πιθανότητες ότι η κλάση $\{1, 2, 3\}$ επιτέλους φτάνεται αρχίζοντας από τις καταστάσεις 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a_4 &= 0.2 + 0.4a_4 + 0.2a_5, \\ a_5 &= 0.7a_4, \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει:

$$\begin{aligned} a_4 &= 0.2 + 0.4a_4 + 0.14a_4 \\ &= \frac{10}{23} \end{aligned}$$

Επίσης, αρχίζοντας από την κατάσταση 4 η πιθανότητα να φθάσουμε στη κλάση $\{6, 7\}$ είναι: $1 - (10/23) = 13/23$.

(ε) (ii) Αρχίζοντας από τις καταστάσεις 4 και 5, έστω ότι οι αναμενόμενοι χρόνοι για να φθάσουμε σε μια περιοδική κατάσταση είναι μ_4 και μ_5 αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= 1 + 0.4\mu_4 + 0.2\mu_5 \\ \mu_5 &= 1 + 0.7\mu_4 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και λύνοντας ως προς τον μ_4 θα πάρουμε τελικά ότι:

$$\mu_4 = \frac{60}{23}$$

Άσκηση 4. Οι μέσες τιμές προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned} E[Y_1] &= E[2X_1 + X_2] = E[2X_1] + E[X_2] = 0, \\ E[Y_2] &= E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2] = 0 \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την covariance εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} cov\,(Y_1, Y_2) &= E[Y_1 Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] \\ &= E[(2X_1 + X_2) \cdot (X_1 - X_2)] \\ &= E[2X_1^2 - X_1 X_2 - X_2^2] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Η διμετάβλητη κανονική κατανομή προσδιορίζεται από τις μέσες τιμές, τις διασπορές και από τον συντελεστή συσχέτισης. Οι διασπορές υπολογίζονται ως εξής:

$$\sigma_{Y_1}^2 = var\,(2X_1) + var\,(X_2) = 5$$

και

$$\sigma_{Y_2}^2 = var\,(X_1) + var\,(X_2) = 2$$

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με:

$$\rho\,(Y_1, Y_2) = \frac{cov\,(Y_1, Y_2)}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Για να βρούμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των Y_1 και Y_2 απλώς αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στον τύπο που δίνει την πυκνότητα πιθανότητας της διμετάβλητης κανονικής κατανομής.

Άσκηση 5. Είναι προφανές ότι έχουμε να κάνουμε με μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με μηδενικές μέσες τιμές. Συγκρίνοντας τη διδόμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $8x^2 + 6xy + 18y^2$ με τον αντιπροσωπευτικό τύπο

$$q(x,y) = \frac{\frac{x^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}}{2\left(1-\rho^2\right)}$$

της διμετάβλητης κανονικής κατανομής παίρνουμε τις παρακάτω τρεις εξισώσεις:

$$\sigma_X^2\left(1-\rho^2\right) = \frac{1}{16}, \qquad \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right) = \frac{1}{36}, \qquad \left(1-\rho^2\right)\sigma_X\sigma_Y = -\frac{\rho}{6}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\left(1-\rho^2\right)\sigma_X\sigma_Y = \frac{1}{24}$$

, το οποίο συνδυαζόμενο με την τελευταία εξίσωση μας δίνει ότι: $\rho = -1/4$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι: $\sigma_X^2 = 1/15$ και $\sigma_Y^2 = 4/135$. Επομένως, τελικά θα έχουμε ότι:

$$c = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\sqrt{135}}{\pi}$$