Εαρινό Εξάμηνο 2005 27 Ιουνίου 2005

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Αφίξεις κατά Poisson.

Ο Κώστας προσπαθεί να πάει στο Χαλάνδρι από την Κατεχάκη. Γνωρίζει ότι υπάρχουν δύο γραμμές λεωφορείων που θα τον παν στον προορισμό του. Η μία γραμμή ξεκινά από το Σύνταγμα ενώ η άλλη ξεκινά από την Ομόνοια. Τα λεωφορεία από το Σύνταγμα και την Ομόνοια καταφθάνουν στην Κατεχάκη με εκθετικά κατανεμημένους και ανεξάρτητους μεταξύ τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων με μέσες τιμές μ_s και μ_o, αντίστοιχα. Τα λεωφορεία από το Σύνταγμα και την Ομόνοια ταξιδεύουν με σταθερές ταχύτητες, v_s και v_o, αντίστοιχα. Η Κατεχάκη βρίσκεται σε απόσταση l_s από το Σύνταγμα και σε απόσταση l_o από την Ομόνοια.

(α) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα λεωφορείο που φτάνει στην Κατεχάκη, ποια είναι η πιθανότητα ότι το λεωφορείο έρχεται από το Σύνταγμα;

(β) Δεδομένου ότι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων του τέταρτου και πέμπτου λεωφορείου, X_5, είναι μεγαλύτερος από t, ποια η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X_5;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον λεωφορείο το οποίο κατευθύνεται προς τον Κώστα (δηλαδή ένα τουλάχιστον λεωφορείο το οποίο κατευθύνεται από το Σύνταγμα ή την Ομόνοια προς την Κατεχάκη).

(δ) Όσο περιμένει το λεωφορείο, ο Κώστας αποκοιμιέται. Όσο κοιμάται, 4 συνεχόμενα λεωφορεία περνούν. Ποια είναι η σ.π.π. του χρόνου μεταξύ των αφίξεων του πρώτου και του τέταρτου λεωφορείου;

(ε) Στην στάση ο Κώστας περιμένει και κάποιον φίλο του ο οποίος αργεί να έρθει. Καθώς βαριέται να περιμένει, ο Κώστας αποφασίζει να ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα κάθε φορά που περνά ένα λεωφορείο. Ποια είναι η σ.π.π. της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο διαδοχικών "κεφαλών";

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Μία απλή Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας τριών καταστάσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(α) Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας.

(β) Μακροπρόθεσμα, τι ποσοστό του χρόνου βρίσκεται η αλυσίδα σε κάθε μία από τις τρεις καταστάσεις;

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Μοντέλο Ehrenfest για την κίνηση μορίων.

N μπάλες είναι μοιρασμένες σε δύο δοχεία. Έστω X_n ο αριθμός από μπάλες που περιέχονται στο δοχείο 1 τη στιγμή n. Διαλέγουμε τυχαία μία από τις μπάλες και την μετακινούμε στο χρόνο $n+1$ στο άλλο δοχείο απο αυτό που βρισκόταν τη στιγμή n.

(α) Προσδιορίστε τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$, τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Από κοινού κανονικές τ.μ..

Έστω X και Z από κοινού κανονικές τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Z^2 = 17/9$, και $E[XZ] = 2$. Ορίζουμε μια νέα τ.μ. $Y = 2X - 3Z$.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y;

(β) Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X και Y;