ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/03/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 27/03/2006

Άσκηση 1. Έστω μία στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) Poisson με ρυθμό αφίξεων λ. Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) N μετρά τον αριθμό των αφίξεων στο διάστημα $[0, t]$ ενώ η τ.μ. M μετρά τον αριθμό των αφίξεων στο διάστημα $[0, t+s]$.

(α) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. N και M, $p_{N,M}(n, m)$.
(β) Βρείτε τη μέση τιμή του γινομένου τους $E[NM]$.

Άσκηση 2. Πακέτα τύπου A, B και C φτάνουν σε ένα κόμβο δικτύου σύμφωνα με τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους σ.δ. Poisson με ρυθμούς αφίξεων a, b και c [πακέτα/λεπτό της ώρας], αντίστοιχα. Για τα επόμενα 5 υποερωτήματα, υποθέτουμε ότι η ουρά εκκενώνεται αμέσως με την άφιξη 10 συνολικά πακέτων.

(α) Ποια η (δεσμευμένη) πιθανότητα, $P(A)$, ότι έχουμε άφιξη πακέτου τύπου A (δεδομένου ότι υπάρχει άφιξη πακέτου). Θεωρείστε ένα διάστημα μικρής χρονικής διάρκειας δ.
(β) Ποια η πιθανότητα ότι, από τα 10 πρώτα πακέτα που φτάνουν στον κόμβο, μόνο το πρώτο και ένα ακόμα από τα υπόλοιπα είναι τύπου A;
(γ) Ποια η πιθανότητα ότι κάποιο άδειασμα της ουράς περιέχει πενταπλάσιο αριθμό πακέτων τύπου A από τύπου B;
(δ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), μέση τιμή και διασπορά του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αδειασμάτων της ουράς.
(ε) Ποια η πιθανότητα ότι ακριβώς 2 πακέτα από κάθε τύπο φτάνουν στον κόμβο κατά τη διάρκεια ενός πενταλέπτου.

Για τα υπόλοιπα υποερωτήματα, υποθέτουμε ότι η ουρά εκκενώνεται αμέσως με την άφιξη τριών συνολικά πακέτων τύπου A.

(στ) Υπολογίστε τη σ.π.π., μέση τιμή και διασπορά του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αδειασμάτων της ουράς.
(ζ) Ένας παρατηρητής κοιτά τον κόμβο μία τυχαία χρονική στιγμή, αφού έχει αρχίσει η διαδικασία αφίξεων. Υπολογίστε τις σ.π.π. των εξής τ.μ.: (i) U, του χρόνου έως την άφιξη του επόμενου πακέτου στον κόμβο, (ii) V, του χρόνου έως το επόμενο άδειασμα της ουράς.

Άσκηση 3. Δύο πομποί A και B στέλνουν μηνύματα σε ένα κοινό δέκτη σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους σ.δ. Poisson με ρυθμούς αποστολής λ_A και λ_B, αντίστοιχα. Τα μηνύματα είναι τόσο σύντομα που μπορούμε να υποθέσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Ο αριθμός των λέξεων σε κάθε μήνυμα (ανεξάρτητα από τον πομπό προέλευσης) είναι τ.μ. με σ.π.

$$p_W(w) = \begin{cases} 2/6 & w = 1 \\ 3/6 & w = 2 \\ 1/6 & w = 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Ποια η πιθανότητα ότι συνολικά 9 μηνύματα λαμβάνονται στο δέκτη σε χρονικό διάστημα διάρκειας t;
(β) Βρείτε τη σ.π.π. της τ.μ. X, του χρόνου από τη στιγμή $t = 0$ έως ότου ο δέκτης λάβει 8 μηνύματα μήκους τριών λέξεων από τον πομπό A.
(γ) Ποια η πιθανότητα ότι 8 από τα επόμενα 12 μηνύματα στο δέκτη προέρχονται από τον πομπό A;

Άσκηση 4. Ένας κακοποιός σκέφτεται να ληστέψει μία τράπεζα. Αστυνομικοί περιπολούν έξω από την τράπεζα σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό λ διελεύσεις ανά λεπτό. Αν κάποιος αστυνομικός περάσει από την τράπεζα κατά τη διάρκεια της ληστείας, ο κακοποιός συλλαμβάνεται.

(α) Αν ο κακοποιός χρειάζεται t λεπτά για να ληστέψει την τράπεζα, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα συλληφθεί;
(β) Ποια είναι η απάντηση στο (α) αν χρειάζεται να περάσουν δύο αστυνομικοί κατά τη διάρκεια της ληστείας για να συλληφθεί ο κακοποιός.

Άσκηση 5. Ένας εργάτης κάθεται μπροστά από έναν ταινιόδρομο (conveyor belt) και πρέπει να αφαιρεί από αυτόν αντικείμενα καθώς αυτά περνούν από μπροστά του. Παρατηρεί ότι η πιθανότητα με την οποία ακριβώς k αντικείμενα φτάνουν σε ένα λεπτό δίνεται από

$$p_K(k) = \frac{2^k e^{-2}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

και συνεπώς υποθέτει ότι οι αφίξεις ακολουθούν μία σ.δ. Poisson.

(α) Αν θελήσει να το σκάσει για λίγο για να κάνει τσιγάρο, πόσο χρόνο μπορεί να λείψει ώστε ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που θα περάσουν χωρίς συλλογή να είναι μικρότερος από 5;

(β) Αν λείψει για 2 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 2 αντικείμενα στο πρώτο λεπτό και ακριβώς 1 αντικείμενο στο δεύτερο λεπτό;

(γ) Αν λείψει για 2 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 3 αντικείμενα;

(δ) Ένα κουδούνι χτυπά μία φορά κάθε λεπτό της ώρας. Αν μεταξύ δύο διαδοχικών χτύπων εμφανίζονται περισσότερα του ενός αντικείμενα, ο εργάτης μπορεί και χειριστεί επιτυχώς τρία μόνο από αυτά καταστρέφοντας τα υπόλοιπα. Ποιο είναι το ποσοστό των αντικειμένων που καταστρέφονται;

Άσκηση 6. (Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις) (α) Ορίζουμε τη ροπή τάξεως n μιας τ.μ. ως $\mu_n = E[Z^n]$ (Για $n = 1$, παίρνουμε τη μέση τιμή της τ.μ.) Δείξτε ότι για την τυπική κανονική τ.μ. $Z \sim N(0, 1)$ ισχύει ότι

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n \text{ περιττό} \\ \frac{(2k)!}{2^k k!} & \text{για } n = 2k. \end{cases}$$

Δηλαδή, όλες οι ροπές περιττής τάξεως της τυπικής κανονικής τ.μ. μηδενίζονται ($E[Z] = E[Z^3] = \ldots = E[Z^{2k+1}] = \ldots = 0$). *Βοήθεια*: Αναπτύξτε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυπικής κανονικής στη σειρά Taylor γύρω από το 0:

$$E[e^{tZ}] = e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!}.$$

(β) Δείξτε πως μπορεί να υπολογιστεί η συνδιασπορά δύο τ.μ. X και Y $cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ από τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_X(s) = E[e^{sX}]$, $M_Y(t) = E[e^{tY}]$ και $M_{X,Y}(s, t) = E[e^{sX+tY}]$.

Άσκηση 7. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Σύμφωνα με το ΚΟΘ, αν $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, όπου οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ του και όμοια κατανεμημένες με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, η κατανομή της τ.μ. Z προσεγγίζεται από την κανονική με μέση τιμή $n\mu$ και διασπορά $n\sigma^2$. Με άλλα λόγια, η τ.μ. $\frac{Z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ είναι μία τυπική κανονική τ.μ. ($\frac{Z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

Ο μηχανικός της υπηρεσίας συστημάτων και δικτύων του Υπολογιστικού Κέντρου του Πανεπιστημίου Κρήτης θέλει να εκτιμήσει το ποσοστό, p, των πακέτων πληροφορίας που ταξιδεύουν μέσα από την οπτική ίνα που συνδέει την Κνωσό και τις Βούτες, τα οποία είναι πακέτα ψηφιακού video (digital video disk, DVD). Ο μηχανικός γράφει ένα script για να ελέγξει συνολικά $n = 1000$ πακέτα, μετράει το πλήθος, S_n, των DVD πακέτων, και χρησιμοποιεί τη σχέση $\hat{p} = S_n/1000$ ως τον εκτιμητή του p. Τα πακέτα που ελέγχονται διαχωρίζονται από εκατοντάδες άλλα πακέτα, συνεπώς είναι λογικό να υποθέσουμε ότι κάθε πακέτο είναι ένα DVD πακέτο με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα άλλα πακέτα.

(α) Τι είδους τυχαία μεταβλητή είναι η S_n; Ορίστε πλήρως τις παραμέτρους της.

(β) Βάσει του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, ποια είναι η κανονική προσέγγιση για την τ.μ. $\hat{p} = S_n/1000$;

(γ) Βρείτε την πιθανότητα ο εκτιμητής $\hat{p}$ να κάνει λάθος λιγότερο από 2%, δηλαδή υπολογίστε την $P(|\hat{p} - p| \leq 0.02)$. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή αυτής της πιθανότητας όταν $p = 0.5$ και όταν $p = 0.1$. Τι παρατηρείτε; (χρησιμοποιείστε το (β) και ότι $\Phi(1.265) = 0.897$, $\Phi(2.108) = 0.9825$.)

(δ) Βρείτε τον αριθμό δ για τον οποίο $P(|\hat{p} - p| < \delta) \approx 0.99$ όταν $p = 0.5$ και όταν $p = 0.1$. ($\Phi(2.58) = 0.995$.)