

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/03/2006

Ημερομηνία Παράδοσης: 27/03/2006

Άσκηση 1.

- (α) Το γεγονός $\{M = m \cap N = n\}$ συμβαίνει όταν $\{N = n\}$ και $\{M - N = m - n\}$. Δηλαδή στο χρονικό διάστημα από $(0, 1]$ έχουμε n αφίξεις, ενώ στο $(t, t + s]$ έχουμε $m - n$ αφίξεις. Εφόσον τα διαστήματα είναι ξένα, τότε οι N και $M - N$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Poisson κατανομή με παράμετρο λ .

Επομένως,

$$\begin{aligned} p_{N,M}(n, m) &= p_N(n)p_{M|N}(M|N) \\ &= \left[\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \right] \left[\frac{(\lambda s)^{m-n} e^{-\lambda s}}{(m-n)!} \right]. \end{aligned}$$

- (β) Για τις ανεξάρτητες Poisson κατανομές $N, M - N$ ισχύει:

$$\begin{aligned} E[NM] &= E[N(M - N) + N^2] \\ &= E[N]E[M - N] + E[N^2] \\ &= (\lambda t)(\lambda s) + [var(N) + E[N]^2] \\ &= (\lambda t)(\lambda s) + \lambda t + (\lambda t)^2. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

- (α) Οι τρεις ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson A, B και C μπορούν να συγχωνευτούν σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό άφιξης πακέτων ανά λεπτό $a + b + c$ όπου a, b, c είναι οι ρυθμοί αφίξεων των αρχικών διαδικασιών A, B και C αντίστοιχα. Για ένα διάστημα μικρής διάρκειας δ ισχύει:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{P(\{\text{πακέτο τύπου A}\}|\{\text{άφιξη πακέτου}\})}{P(\{\text{άφιξη πακέτου}\})} \\ &= \frac{\alpha \delta}{(a + b + c)\delta} \\ &= \frac{\alpha}{a + b + c}. \end{aligned}$$

- (β) Η πιθανότητα από τα 10 πρώτα πακέτα μόνο το πρώτο και ένα ακόμα από τα υπόλοιπα είναι τύπου A είναι:

$$\begin{aligned} p &= P(A) \binom{9}{1} P(A) (1 - P(A))^8 \\ &= \binom{9}{1} P(A)^2 (1 - P(A))^8. \end{aligned}$$

- (γ) Το ενδεχόμενο κάποιο άδειασμα της ουράς να περιέχει πενταπλάσιο αριθμό πακέτων τύπου A από τύπου B μπορεί να γίνει με τους εξής 2 τρόπους: 5 πακέτα τύπου A, 1 πακέτο τύπου B και 4 τύπου C, ή 0 πακέτα τύπου A, 0 πακέτα τύπου B και 10 τύπου C. Η πιθανότητα του ζητούμενου ενδεχόμενου είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο περιπτώσεων. Δηλαδή,

$$\frac{10!}{5!1!4!}P(A)^5P(B)P(C)^4 + P(C)^{10},$$

$$\text{όπου } P(A) = \frac{a}{a+b+c}, P(B) = \frac{b}{a+b+c}, P(C) = \frac{c}{a+b+c}.$$

- (δ) Εφόσον οι A, B, και C είναι τρεις ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson τότε ο χρόνος T μεταξύ διαδοχικών αδειασμάτων της ουράς ακολουθεί Erlang κατανομή τάξης 10 και παράμετρο a+b+c. Η συνάρτηση επομένως πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{(a+b+c)^{10} \cdot t^9 \cdot e^{-(a+b+c)t}}{9!} & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της T (Erlang τάξης 10 και παράμετρο a+b+c) είναι:

$$E[T] = \frac{10}{a+b+c},$$

και η διασπορά της:

$$\text{var}[T] = \frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

- (ε) Έστω $X = \{\text{ακριβώς δύο πακέτα τύπου A φτάνουν κατά τη διάρκεια ενός πενταλέπτου}\}$
 $Y = \{\text{ακριβώς δύο πακέτα τύπου B φτάνουν κατά τη διάρκεια ενός πενταλέπτου}\}$
 $Z = \{\text{ακριβώς δύο πακέτα τύπου C φτάνουν κατά τη διάρκεια ενός πενταλέπτου}\}$

Τα ενδεχόμενα A, B, C είναι ανεξάρτητα επομένως,

$$\begin{aligned} p &= P(\{\text{ακριβώς 2 πακέτα από κάθε τύπο φτάνουν στο κόμβο σε 5 λεπτά}\}) \\ &= P(X)P(Y)P(Z) \\ &= \left(\frac{(5a)^2 e^{-5a}}{2}\right) \left(\frac{(5b)^2 e^{-5b}}{2}\right) \left(\frac{(5c)^2 e^{-5c}}{2}\right) \\ &= \frac{(125abc)^2 e^{-5(a+b+c)}}{8}. \end{aligned}$$

- (στ) Ο χρόνος T, μεταξύ δύο διαδοχικών αδειασμάτων της ουράς είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Erlang κατανομή τάξης 3 και με παράμετρο α. Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της T είναι:

$$p_T(t) = \begin{cases} \frac{a^3 t^2 e^{-at}}{2!} & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της T είναι:

$$E[T] = \frac{3}{a},$$

και η διασπορά της:

$$\text{var}[T] = \frac{3}{a^2}.$$

- (ζ) i. Εφόσον ο χρόνος άφιξης των πακέτων στον κόμβο είναι μια διαδικασία Poisson, ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου πακέτου ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $a+b+c$. Επομένως,

$$p_U(u) = \begin{cases} (a+b+c)e^{-(a+b+c)u} & u \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- ii. Εάν η παρατήρηση έγινε πριν την πρώτη άφιξη πακέτου (τύπου A), τότε η τυχαία μεταβλητή V ακολουθεί τρίτης τάξης κατανομή Erlang με παράμετρο α . Εάν η παρατήρηση έγινε μεταξύ της πρώτης και δεύτερης άφιξης πακέτου (τύπου A), τότε η V ακολουθεί δεύτερης τάξης κατανομή Erlang με παράμετρο α . Τέλος, αν η παρατήρηση έγινε μετά την δεύτερη άφιξη πακέτου (τύπου A), τότε η V ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο α . Επομένως,

$$p_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{\alpha^3 v^2 e^{-\alpha v}}{2!} + \frac{1}{3} \alpha^2 v e^{-\alpha v} + \frac{1}{3} \alpha e^{-\alpha v} & v \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 3.

- (α) Έστω R ο αριθμός των μηνυμάτων που έχουν ληφθεί σε χρόνο t . Η R ακολουθεί Poisson κατανομή με ρυθμό αποστολής $\lambda_A + \lambda_B$. Επομένως,

$$\begin{aligned} p_R(9) &= P(\{\text{ακριβώς 9 μηνύματα σε χρόνο } t\}) \\ &= \frac{((\lambda_A + \lambda_B)t)^9 e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}}{9!}. \end{aligned}$$

- (β) Η άφιξη μηνυμάτων μήκους 3 λέξεων του πομπού A, είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό άφιξης $\lambda_{APW}(3)$. Επομένως, η X είναι μια Erlang κατανομή τάξης 8, επομένως,

$$f_X(x) = \frac{(\frac{1}{6}\lambda_A)^8 x^7 e^{-\frac{1}{6}\lambda_A x}}{7!}.$$

- (γ) Τα μηνύματα που φτάνουν στον δέκτη προέρχονται είτε από τον πομπό A είτε από τον πομπό B. Η άφιξη απομένως των μηνυμάτων είναι μια Bernoulli δοκιμασία. Επιτυχία στην δοκιμασία έχουμε όταν το μήνυμα προέρχεται από τον A. Η πιθανότητα επιτυχίας στην Bernoulli δοκιμασία είναι $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$. Ο αριθμός των συνεχόμενων επιτυχιών της Bernoulli δοκιμασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Διωνυμική κατανομή. Επομένως, η πιθανότητα ότι 8 από τα επόμενα 12 μηνύματα στο δέκτη προέρχονται από τον πομπό A είναι,

$$\binom{12}{8} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^8 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^4.$$

Άσκηση 4.

- (α) Ο κακοποιός συλλαμβάνεται εάν ο πρώτος αστυνομικός περάσει από την τράπεζα σε λιγότερα από t λεπτά. Αφού ο χρόνος Y μέχρι την πρώτη άφιξη ακολουθεί εκθετική κατανομή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(Y < t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= 1 - e^{-t\lambda}. \end{aligned}$$

- (β) Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα η δεύτερη άφιξη αστυνομικού να γίνει πριν τη χρονική στιγμή t . Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος της δεύτερης άφιξης ακολουθεί Erlang κατανομή τάξης 2. Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Erlang κατανομής τάξης 2, δηλαδή

$$\begin{aligned} P(Y_2 < t) &= \int_0^t \frac{\lambda^2 y e^{-\lambda y}}{1!} dy \\ &= \int_0^t \lambda^2 y e^{-\lambda y} dy \\ &= \int_0^t -\lambda y (e^{-\lambda y})' dy \\ &= 1 - (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

- (α) Εφόσον οι αφίξεις ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda=2$ ανά λεπτό, ο μέσος αριθμός αντικειμένων που θα περάσουν σε t λεπτά είναι $2t$. Για να είναι ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που θα περάσουν χωρίς συλλογή μικρότερος από 5, τότε αρκεί $2t \leq 5 \Leftrightarrow t \leq 2.5$.
- (β) Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των αφίξεων αντικειμένων κάθε λεπτό, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_K(2)p_K(1) = \frac{2^3 e^{-4}}{2}.$$

- (γ) Ο αριθμός των αφίξεων σε ένα διάστημα 2 λεπτών είναι μια Poisson στοχαστική διαδικασία με παράμετρο $2\lambda = 4$. Επομένως, η πιθανότητα 3 αφίξεων σε 2 λεπτά είναι:

$$\frac{4^3 e^{-4}}{3!}.$$

- (δ) Ο εργάτης μπορεί να χειριστεί επιτυχώς τρία αντικείμενα. Επομένως, ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που μπορεί να χειριστεί επιτυχώς ο εργάτης σε ένα λεπτό είναι:

$$\begin{aligned} &p_K(1) + 2p_K(2) + 3(p_K(3) + p_K(4) + \dots) \\ &= p_K(1) + 2p_K(2) + 3(1 - p_K(0) - 1 - p_K(1) - 1 - p_K(2)) \\ &= 3 - 3p_K(0) - 2p_K(1) - p_K(2) = 3 - 9e^{-2}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που δεν μπόρεσε να χειριστεί επιτυχώς ο εργάτης ισούται με:

$$\lambda - 3 + 9e^{-2} = 9e^{-2} - 1.$$

Όμως $\lambda = 2$, επομένως το ποσοστό των αντικειμένων που καταστρέφονται είναι $\frac{9e^{-2}-1}{2}$.

Άσκηση 6.

(α) Γενικά ισχύει η ισότητα:

$$e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$$

Επομένως,

$$E[e^{tZ}] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tZ)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\frac{Z^n t^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E[Z^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[Z^n]}{n!} t^n$$

Είδαμε όμως ότι για την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 ισχύει:

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(t^2/2)^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} t^{2k}$$

Όμως $M_Z(t) = E[e^{tZ}]$ επομένως εξισώνοντας τους συντελεστές των πολυωνύμων έχουμε:

$$\frac{E[Z^n]}{n!} = 0 \quad \text{αν } n \text{ περιττός}$$

$$\frac{E[Z^n]}{n!} = \frac{1}{2^k k!} \quad \text{αν } n=2k.$$

δηλαδή,

$$\frac{E[Z^n]}{n!} = 0 \quad \text{αν } n \text{ περιττός}$$

$$E[Z^n] = \frac{2^k k!}{2^k k!} \quad \text{αν } n=2k.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της ροπογεννήτριας οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής στο σημείο μηδέν ισούται με την μέση τιμή της κατανομής:

$$M_X(s) = E[e^{sX}] \Rightarrow \frac{d}{ds} M_X(s) = E[Xe^{sX}] \Rightarrow \frac{d}{ds} M_X(0) = E[X].$$

Επομένως για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y ισχύουν οι σχέσεις $E[X] = M'_X(0)$, $E[Y] = M'_Y(0)$. Θα δείξουμε ότι για $M_{X,Y}(s, t) = E[e^{sX+tY}]$ ισχύει $\frac{d^2}{dsdt} M_{X,Y} \Big|_{(0,0)} = E[XY]$.

$$\frac{d}{ds} M_{X,Y}(s, t) = E[Xe^{sX+tY}] \Rightarrow \frac{d^2}{dsdt} M_{X,Y}(s, t) = E[XYe^{sX+tY}].$$

Για $s = t = 0$ έχουμε,

$$\frac{d^2}{dsdt} M_{X,Y} \Big|_{(0,0)} = E[XYe^0] = E[XY].$$

Επομένως,

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{d^2}{dsdt} M_{X,Y} \Big|_{(0,0)} - M'_X(0)M'_Y(0).$$

Άσκηση 7.

(α) Η τυχαία μεταβλητή είναι της μορφής $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$, όπου

$$X_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p, \end{cases}$$

δηλαδή η X_i είναι μια Bernoulli τυχαία μεταβλητή με $X_i = 1$ όταν το i -οστό πακέτο είναι DVD πακέτο. Επομένως η τυχαία μεταβλητή S_n είναι διωνυμική με παραμέτρους $n = 1000$, p .

(β) Η τυχαία μεταβλητή διασπορά $np(1-p)$. Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $\hat{p} = \frac{S_n}{n}$ έχει μέση τιμή p , και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$. Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, η $\hat{p}$ μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή με $\mu = p$, $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}$.

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| \leq \delta) &= P(-\delta \leq \hat{p} - p \leq \delta) = P\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Για $p = 0.5$, $\delta = 0.02$ ισχύει:

$$P(|\hat{p} - 0.5| \leq 0.02) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0.02 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5}}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(1.265) - 1 = 0.794 = 79.4\%.$$

Για $p = 0.1$, $\delta = 0.02$ ισχύει:

$$P(|\hat{p} - 0.1| \leq 0.02) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0.02 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(2.108) - 1 = 0.965 = 96.5\%.$$

Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το ποσοστό των πακέτων πληροφορίας, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ο εκτιμητής να κάνει λάθος λιγότερο από 2%.

(δ) Πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Phi\left(\delta\sqrt{\frac{1000}{p(1-p)}}\right) - 1 &= 0.99 \Rightarrow \Phi\left(\delta\sqrt{\frac{1000}{p(1-p)}}\right) = 0.995 \\ \Rightarrow \delta\sqrt{\frac{1000}{p(1-p)}} &= 2.58 \Rightarrow \delta = 2.58\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}}. \end{aligned}$$

$$\text{Για } p = 0.5, \delta = 2.58\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{1000}} = 0.04.$$

$$\text{Για } p = 0.1, \delta = 2.58\sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{1000}} = 0.025.$$