ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/04/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 08/05/2006

Άσκηση 1. Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα (1).

(α) Έστω A_k το γεγονός ότι το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά τη χρόνική στιγμή k. Ο μόνος τρόπος να εμφανιστεί το A_k είναι να επισκεφτεί την S_3 την χρονική στιγμή 0, να μείνει εκεί τις επόμενες $k-2$, και τελικά να επισκεφτεί την S_2 την χρονική στιγμή k. Επομένως,

$$P(A_k) = p_{03} \cdot p_{33}^{k-2} \cdot p_{32} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1},$$

for $k = 2, 3, ...$

(β) Έστω A το γεγονός ότι το σύστημα δεν επισκέπτεται την S_4 ποτέ. Υπάρχουν τρείς τρόποι να εμφανιστεί το A. Ο ένας τρόπος είναι εαν γίνει η μετάβαση από το S_0 στο S_1, ο άλλος τρόπος είναι να γίνει η μετάβαση από το S_0 στο S_5. Οι μεταβάσεις αυτές πραγματοποιούνται με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Τέλος, το A μπορεί να εμφανιστεί εαν η πρώτη μετάβαση είναι από το S_0 στο S_3 και μετά στο S_2. Η πιθανότητα να μεταβεί από το S_0 στο S_3 είναι $\frac{1}{3}$. Δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε η μετάβαση αυτή, η πιθανότητα μετά να επισκεφτεί την S_2 είναι $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Συνολικά η μετάβαση από το S_0 στο S_3 και μετά στο S_2 γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{9}$. Επομένως, η πιθανότητα να μην επισκεφτεί ποτέ το S_4 είναι $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$.

(γ) $P(\{\text{επίσκεψη στο } S_0 \text{ και έξοδος από το } S_0 \text{ την επόμενη χρονική στιγμή }\})$

$$\begin{aligned}
&= P(\{\text{επίσκεψη στο } S_0\})P(\{\text{εγκαταλείπει το } S_0\}|\{\text{βρίσκεται στο } S_0\}) \\
&= \Big[\sum_{k=2}^{\infty} P(A_k)\Big] \cdot \frac{1}{2} \\
&= \Big[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1}\Big] \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

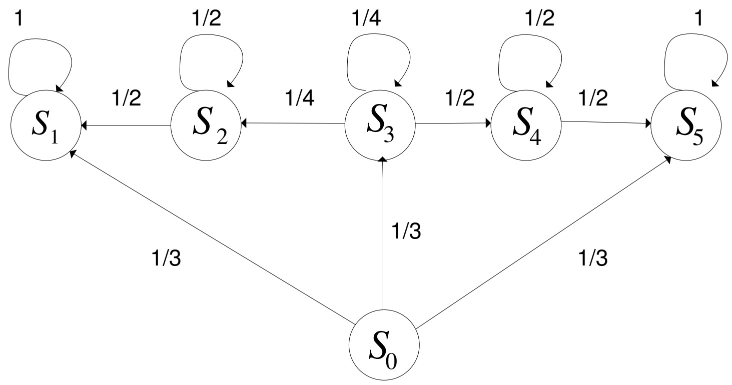
(δ) Το γεγονός αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί εαν γίνουν διαδιχικά οι μεταβάσεις,

$$S_0 \to S_3 \to S_2 \to S_1.$$

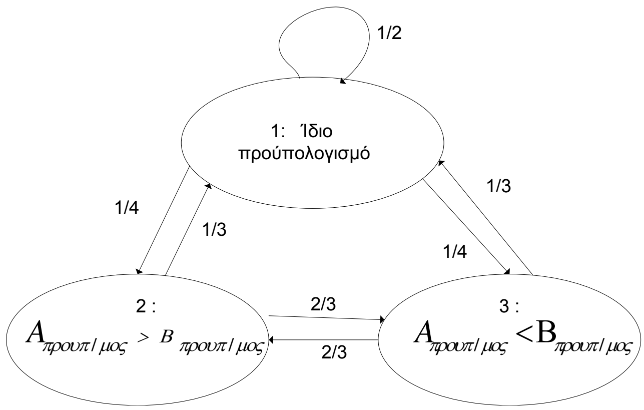
Επομένως,
$P(\{\text{επισκέπτεται το } S_1 \text{ για πρώτη φορά την χρονική στιγμή 3 }\}) = p_{03} \cdot p_{32} \cdot p_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

(ε) $P(\{\text{επίσκεψη στο } S_3 \text{ αμέσως μετά τη χρονική στιγμή N }\})$

$$\begin{aligned}
&= P(\{\text{επισκέπτεται το } S_3 \text{ για πρώτη φορά την χρονική στιγμή} \\
&\quad \text{1 και μένει εκεί για τις επόμενες N-1 χρονικές στιγμές }\}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ για } n = 1, 2, 3, ...
\end{aligned}$$



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα έξι καταστάσεων.



Σχήμα 2: Μαρκοβιανή αλυσίδα για τις δύο εταιρίες Α,Β.

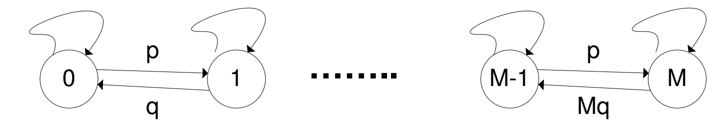
Άσκηση 2.

(α) Έστω Α,Β οι δύο εταιρίες, η Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντελοποιείται όπως φαίνεται στο Σχήμα (2).

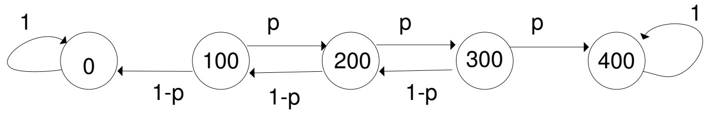
(β) Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 &= \pi_1 \\
\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 &= \pi_2 \\
\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 &= \pi_3 \\
\sum_i \pi_i &= 1.
\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι $\pi_1 = \frac{4}{10}, \pi_2 = \frac{3}{10}, \pi_3 = \frac{3}{10}$. Άρα η οριακή πιθανότητα ότι σε μια χρονιά στο απώτερο μέλλον οι δύο εταιρίες θα έχουν ίδιους προϋπολογισμούς διαφήμισης είναι 40%.



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή αλυσίδα M καταστάσεων.



Σχήμα 4: Μαρκοβιανή αλυσίδα στην περίπτωση όπου η Μαρία ποντάρει 100 ενώ έχει ξεκινήσει με 200 ευρώ.

Άσκηση 3.

(α) Ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, Σχήμα (3), με τόσες καταστάσεις όσους και φοιτητές, δηλαδή $0, 1, ..., M$. Έστω ότι $Mq < 1$, το γράφημα γίνεται ως εξής:

(β) Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του ερωτήματος α), οι εξισώσεις ισορροπίας είναι,

$$\pi_i p = \pi_{i+1}(i+1)q, \qquad i = 0, 1, 2, ..., M-1.$$

Ορίζουμε $\rho = p/q$, οπότε $\pi_{i+1} = \frac{\rho}{i+1}\pi_i$, άρα,

$$\pi_i = \frac{\rho^i}{i!}\pi_0, \qquad i = 0, 1, 2, ..., M-1. \tag{1}$$

Όμως, $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_M$ και επομένως,

$$1 = \pi_0\Big(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^M}{M!}\Big),$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} \frac{\rho^k}{k!}} \ . \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας επομένως τις (1), (2) έχουμε ότι,

$$\pi_i = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^{M} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

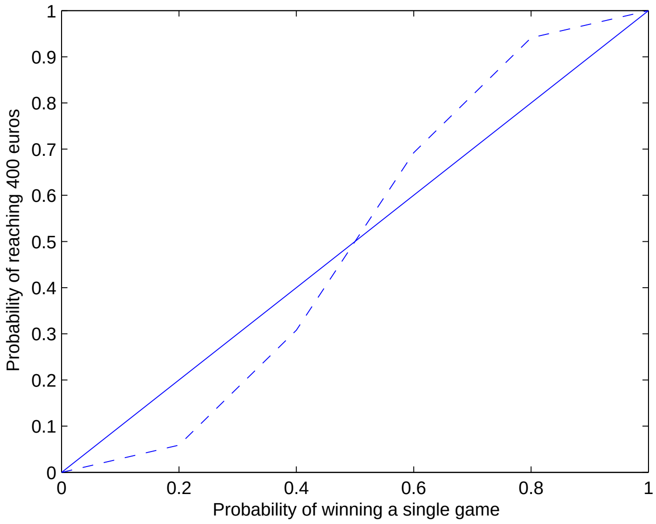
Επομένως, ο μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά είναι,

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{M} i\pi_i = \rho \cdot \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^{M} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Άσκηση 4.

(α) Αναλύουμε και τις δύο στρατηγικές.
Αρχικά, η Μαρία ποντάρει 200 ευρώ. Έτσι, είτε θα κερδίσει το επιθυμητό ποσό είτε θα τα χάσει όλα. Η πιθανότητα να κερδίσει είναι p.
Στην άλλη περίπτωση, η Μαρία ποντάρει 100 ευρώ. Το γράφημα της αλυσίδας στην περίπτωση αυτή φαίνεται στο Σχήμα (4):
Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η Μαρία να κερδίσει τελικά δεδομένου ότι ξεκίνησε με 200 ευρώ. Με α_j συμβολίζουμε την πιθανότητα να κερδίσει η Μαρία δεδομένου ότι ξεκίνησε με j ευρώ. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 p \\ \alpha_2 &= \alpha_1(1-p) + \alpha_3 p \\ \alpha_3 &= \alpha_2(1-p) + p. \end{aligned}$$



Σχήμα 5: Η συνεχόμενη γραμμή εκφράζει την πρώτη στρατηγική (ποντάρω όσα λεφτά έχω) ενώ η διακεκομμένη την δεύτερη στρατηγική (ποντάρω 100 ευρώ ενώ έχω 200).

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι,

$$\alpha_2 = \frac{p^2}{1 - 2p + 2p^2}.$$

Συγκρίνοντας τα p και α_2 μπορούμε να αποφασίσουμε ποιά στρατηγική πρέπει να επιλέξει η Μαρία. Στη γραφική παράσταση του Σχήματος (5) η συνεχόμενη γραμμή εκφράζει την πρώτη στρατηγική ενώ η διακεκομμένη την δεύτερη στρατηγική. Από το διάγραμμα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η πρώτη στρατηγική είναι προτιμότερη όταν $p < 1/2$, ενώ η δεύτερη όταν $p > 1/2$. Για $p = 1/2$ οι δύο στρατηγικές δεν διαφοροποιούνται.

(β) Με πιθανότητα $p = 0.75$, η βέλτιστη στρατηγική είναι η Μαρία να ποντάρει 100 ευρώ όταν έχει 200 ευρώ. Πρέπει να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό προσπαθειών μέχρις ότου χάσει όλα τα λεφτά ή τα διπλασιάσει, δεδομένου ότι ξεκίνησε με 200 ευρώ.
Έστω μ_i ο μέσος αριθμός ξεκινώντας από τη θέση i. Τότε $\mu_0 = 0$, $\mu_4 = 0$ (absorption states). Ισχύει,

$$\mu_i = 1 + \sum_{j=1} 3 p_{ij} \mu_j.$$

Για τις διάφορες τιμές του j έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + p\mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + (1-p)\mu_1 + p\mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + (1-p)\mu_2. \end{aligned}$$

Άρα για $p = 0.75$ έχουμε ότι $\mu_1 = 3.4,\ \mu_2 = 3.2,\ \mu_3 = 1.8$. Η απάντηση στο ερώτημα είναι 3.2.