

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 2.5 Ωρες

Θέμα 1 - 50 μονάδες. Αφίξεις κατά Poisson.

Κάνετε ένα ταξίδι σαφάρι στην Αφρική. Ένα από τα αξιοθέατα του ταξιδιού είναι η παρακολούθηση λιονταριών και ελεφάντων που έρχονται να πιουν νερό από τον ποταμό Νίγηρα. Τα λιοντάρια φτάνουν στο ποτάμι σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda_l = 8$ την ώρα, ενώ οι ελέφαντες καταφθάνουν σύμφωνα με μία ανεξάρτητη διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda_e = 2$ την ώρα. Την πρώτη μέρα του ταξιδιού σας, φτάνετε στο ποτάμι ελπίζοντας να δείτε πολλά ζώα. Υποθέστε ότι λιοντάρια και ελέφαντες είναι τα μόνα διψασμένα ζώα που επισκέπτονται το ποτάμι.

(α) Έστω N ο αριθμός των ζώων που βλέπετε τις 3 πρώτες ώρες. Βρείτε τα μεγέθη $E[N]$ και $var(N)$.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε τον 3ο ελέφαντα πριν το 9ο λιοντάρι;

(γ) Μετά από 3 ώρες έχετε δει 24 λιοντάρια αλλά κανένα ελέφαντα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε ένα ελέφαντα μέσα στην επόμενη ώρα;

(δ) Ο φίλος σας έχει φτάσει στο ποτάμι με την ψηφιακή του κάμερα, γεμάτος χαρά ότι θα βγάλει πολλές ωραίες φωτογραφίες. Δυστυχώς η κάμερα του έπεσε και δεν λειτουργεί σωστά: κάθε φορά που πατάει το κουμπί, η κάμερα δεν λειτουργεί με πιθανότητα 0.1, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Ο φίλος σας επιχειρεί να φωτογραφήσει κάθε φορά που ένα ζώο (λιοντάρι ή ελέφαντας) φτάνει στο ποτάμι. Έστω X ο χρόνος (σε ώρες) έως ότου πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ;

Θέμα 2 - 50 μονάδες. Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Η απόδοση της ομάδας ποδοσφαίρου του ΠΑΟΚ είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ηθικό των παιχτών της. Αν η ομάδα έχει κερδίσει τα τελευταία δύο παιχνίδια, τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.7. Αν έχει χάσει το τελευταίο παιχνίδι αλλά έχει κερδίσει το προ-τελευταίο, τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.4. Αν έχει κερδίσει το τελευταίο παιχνίδι αλλά έχει χάσει το προ-τελευταίο, τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.6. Τέλος, αν έχει χάσει τα τελευταία δύο παιχνίδια, έχει πιθανότητα μόνο 0.3 να κερδίσει το επόμενο. Κανένα παιχνίδι δεν τελειώνει σε ισοπαλία. Όταν αρχίζετε να παρατηρείτε, η ομάδα έχει κερδίσει δύο διαδοχικά παιχνίδια.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τον μικρότερο αριθμό καταστάσεων που περιγράφει πλήρως την απόδοση της ομάδας. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

Για τις επόμενες ερωτήσεις, είναι χρήσιμο να αριθμήσετε τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Επίσης ορίστε ως X_n το αποτέλεσμα του n -στου παιχνιδιού.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη ήττα θα ακολουθηθεί από άλλη μία ήττα;

(γ) Έστω Y ο αριθμός των παιχνιδιών που παίζονται μέχρι την πρώτη ήττα της ομάδας (χωρίς να μετράται η ήττα). Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y ;

(δ) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η ομάδα θα κερδίσει το 1000-στο παιχνίδι, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα του 1000-στου και 1001-στου παιχνιδιών είναι τα ίδια;

(στ) Έστω T ο αριθμός των παιχνιδιών μέχρι και την 2η συνεχόμενη ήττα της ομάδας. Γράψτε ένα σύστημα εξισώσεων για την εύρεση του $E[T]$.

(ζ) Ο προπονητής αποφασίζει ότι θα παραιτηθεί αμέσως μετά την 3η συνεχόμενη ήττα της ομάδας. Έστω N ο αριθμός των παιχνιδιών στα οποία θα κοουτσάρει την ομάδα. Γράψτε ένα σύστημα εξισώσεων για την εύρεση του $E[N]$.