ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/03/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/04/2007

Άσκηση 1. Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X είναι

$$M_X(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-s} + \frac{2}{3}\frac{3}{3-s}.$$

Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια μιας τ.μ. με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} + (1-p)\mu e^{-\mu x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου p είναι σταθερά με $0 \leq p \leq 1$.

Άσκηση 3. Η τ.μ. Z έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_Z(s) = \frac{a-3s}{s^2-6s+8}.$$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς a.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z \geq 0.5)$.
(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[Z]$, χρησιμοποιώντας τη σ.π.π. της Z.
(δ) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[Z]$, χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της Z.
(ε) Υπολογίστε τη διασπορά, $var(Z)$, χρησιμοποιώντας τη σ.π.π. της Z.
(στ) Υπολογίστε τη διασπορά, $var(Z)$, χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της Z.

Άσκηση 4. Έστω τ.μ. X με

$$M_X(s) = a + be^{2s} + ce^{4s}, \quad E[X] = 3, \quad var(X) = 2.$$

Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c και τη συνάρτηση πιθανότητας της X.

Άσκηση 5. Ψηφοφόροι κάποιας περιφέρειας ψήφισαν για έναν από τους υποψηφίους Α και Β. Η αρχική επιβεβαιωμένη καταμέτρηση των ψήφων έδειξε ότι ο υποψήφιος Β προηγείται του Α με 537 ψήφους. Όμως, υπάρχουν 25.600 ψηφοδέλτια τα οποία εκκρεμούν στο εκλογοδικείο και ως εκ τούτου δεν έχουν καταχωρηθεί ακόμα σε κανέναν από τους δύο υποψηφίους.

Υποθέστε ότι τελικά και τα 25.600 ψηφοδέλτια που εκκρεμούν θα βρεθούν έγκυρα και θα αποδοθούν ισοπίθανα στους δύο υποψηφίους, κάθε ένα ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Έστω X και Y οι αριθμοί των ψηφοδελτίων (από τα 25.600) που θα αποδοθούν στους Α και Β, αντίστοιχα.

(**α**) Τι είδους τυχαία μεταβλητή είναι η X;
(i) Bernoulli με παράμετρο $p =$
(ii) Poisson με παράμετρο $\lambda =$
(iii) Γεωμετρική με παράμετρο $p =$
(iv) Διωνυμική με παραμέτρους $(n, p) =$
(v) Αρνητική διωνυμική με παραμέτρους $(r, p) =$
(vi) Καμία από τις ανωτέρω αλλά δίνεται από τη σχέση $p_X(k) =$

(**β**) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της X;

(**γ**) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με μία πρόταση.

(**δ**) Από τη στιγμή που και οι 25.600 ψήφοι προσμετρούνται στο τελικό αποτέλεσμα, είναι δυνατόν οι Α και Β να λάβουν τελικά τον ίδιο αριθμό ψήφων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με μία πρόταση.

(**ε**) Αφού οι 25.600 ψήφοι προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. $Z = X - Y$, του καθαρού κέρδους του υποψηφίου Α στην ψηφοφορία;

(**στ**) Αφού οι 25.600 ψήφοι προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα, χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Κεντρικού Ορίου (ΘΚΟ) για να εκτιμήσετε την πιθανότητα να κερδίσει ο Β την εκλογή. (Μικρή βοήθεια: $\sqrt{25.600} = 160$).

(**ζ**) Τώρα, υποθέστε ότι στη συγκεκριμένη εκλογική περιφέρεια, ο Α είναι πιο δημοφιλής από τον Β. Έτσι, κάθε ένα από τα 25.600 ψηφοδέλτια είναι υπέρ του Α με πιθανότητα $p > 0,5$. Π.χ. αν $p = 1$, ο Α θα λάβει και τα 25.600 ψηφοδέλτια και θα κερδίσει την εκλογή από τον Β όταν αυτά προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα. Για κάπως μικρότερες τιμές του p, υπάρχει "αρκετή" πιθανότητα ο Α να προσπεράσει τον Β στην τελική καταμέτρηση. Χρησιμοποιώντας και πάλι το ΘΚΟ, υπολογίστε την *ελάχιστη* τιμή του p έτσι ώστε η πιθανότητα να κερδίσει ο Α την εκλογή να είναι μεγαλύτερη από 0,5.