ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/03/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/04/2007

Άσκηση 1.

Η X είναι συνδυασμός δύο εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με παραμέτρους 1 και 3, οι οποίες είναι επιλεγμένες με πιθανότητα 1/3 και 2/3 αντίστοιχα. Έτσι, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3} \cdot 3e^{-3x} & \text{για } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλίως} \end{cases}$$

Άσκηση 2.

Η τυχαία μεταβλήτη X είναι ένας συνδυασμός από δύο εκθετικές τυχαίες μεταβλητές, όπου η μία έχει ως παράμετρο λ ενώ η άλλη παράμετρο μ. Επιλέγοντας την εκθετική μεταβλήτη με παράμετρο λ με πιθανότητα p, τότε η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$M_X(s) = p\frac{\lambda}{\lambda - s} + (1-p)\frac{\mu}{\mu - s}$$

Να σημειωθεί ότι ο μετασχηματισμός ισχύει μόνο για $s < \min\{\lambda, \mu\}$

Άσκηση 3.

(α) Ο ορισμός του μετασχηματισμού είναι

$$M_Z(s) = \mathbf{E}[e^{sZ}]$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$M_Z(0) = \mathbf{E}[e^{0Z}] = \mathbf{E}[1] = 1$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι

$$M_Z(0) = \frac{a}{8} = 1$$

Άρα $a = 8$.

(β) Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα:

$$M_Z(s) = \frac{8-3s}{s^2 - 6s + 8} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = (s-4)M_Z(s)|_{s=4} = \left.\frac{8-3s}{s-2}\right|_{s=4} = -2$$

$$B = (s-2)M_Z(s)|_{s=2} = \left.\frac{8-3s}{s-4}\right|_{s=2} = -1$$

Έτσι

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s-4} + \frac{-1}{s-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{4-s} + \frac{2}{2-s}\right)$$

και

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(4e^{-4z} + 2e^{-2z}\right) & \text{για } z \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Από αυτό παίρνουμε ότι:

$$\mathbf{P}(Z \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} \frac{1}{2}(4e^{-4z} + 2e^{-2z})dz = \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-1}}{2}$$

(γ)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z] &= \int_0^{\infty} \frac{z}{2}(4e^{-4z} + 2e^{-2z})dz \\
&= \frac{1}{2}(\int_0^{\infty} 4ze^{-4z}dz + \int_0^{\infty} 2ze^{-2z}dz) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(δ)

$$\mathbf{E}[Z] = \frac{d}{ds}M_Z(s)\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2}\bigg|_{s=0} = \frac{3}{8}$$

(ε) Γνωρίζουμε ότι $var(Z) = \mathbf{E}[Z^2] - \mathbf{E}[Z]^2$

$$\mathbf{E}[Z^2] = \int_0^{\infty} \frac{z^2}{2}(4e^{-4z}+2e^{-2z})dz = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} 4z^2e^{-4z}dz + \int_0^{\infty} 2z^2e^{-2z}dz\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4^2} + \frac{2}{2^2}\right) = \frac{5}{16}$$

Άρα :

$$var(Z) = \frac{5}{16} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{64}$$

(στ)

$$\mathbf{E}[Z^2] = \frac{d^2}{ds^2}M_Z(s)\bigg|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^3} + \frac{1}{(2-s)^3}\bigg|_{s=0} = \frac{5}{16}$$

Άρα :

$$var(Z) = \frac{5}{16} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{64}$$

Άσκηση 4.

Οι σταθερές a, b και c μπορούν να υπολογιστούν μέσω των παρακάτω τριών σχέσεων:

- $M(0) = 1$
- $\frac{d}{ds}M(s)\big|_{s=0} = \mathbf{E}[X] = 3$
- $\frac{d^2}{ds^2}M(s)\Big|_{s=0} = var(X) + (\mathbf{E}[X])^2 = 11$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφτούν και ως

- $a + b + c = 1$
- $2b + 4c = 3$
- $4b + 16c = 11$

Λύνοντας το παραπάνω συστημα βρίσκουμε ότι $a = 1/8, b = 2/8$ και $c = 5/8$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X μπορεί να υπολογιστεί από τις δυνάμεις των e^s και των σταθερών μεταβλητών από το $M(s)$. Έτσι έχουμε:

$$P(X = 0) = a = 1/8,\ P(X = 2) = b = 2/8,\ P(X = 4) = c = 5/8$$

Άσκηση 5.

(α) Η τυχαία μεταβλητή X είναι διωνυμική με $(n, p) = (25600, 1/2)$.

(β) Η μέση τιμή της τ.μ X είναι:

$$E[X] = np = 25600\frac{1}{2} = 12800$$

και η διασπορά της:

$$var(X) = np^2 = 6400$$

(γ) Αφού $X + Y = 25600$, οι $X,\ Y$ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

(δ) Οι X και Y είναι απαραίτητα και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Ως εκ τούτον, η διαφορά τους , $X - Y$, δεν μπορεί να ισούται με 537, την υπεροχή του B από τον A. Επομένως, κάποιος από τους $A,\ B$ θα νικήσει.

(ε) Η τυχαία μεταβλητή $Z = X - Y$ έχει μέση τιμή:

$$E[Z] = E[X - Y] = E[2X - 25600] = 2E[X] - 25600 = 0$$

και διασπορά:

$$var(Z) = var(2X - 25600) = 4 \cdot var(X^2) = 25600$$

(στ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Κεντρικού Ορίου η τυχαία μεταβλητή Z μπορεί να προσεγγιστεί από μια κανονική τυχαία μεταβλητή με $Z \sim N(0, 25600)$. Τώρα:

$$P(\text{ο } B \text{ κερδίζει}) = P(Z \leq 536) \simeq \Phi\left(\frac{536 - 0}{\sqrt{25600}}\right) = \Phi(3.35) \simeq 0.9996$$

(ζ) Σε αυτή την περίπτωση, η τ.μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $(25600, p)$. Επομένως η διαφορά $Z = X - Y = 2X - 25600$ έχει

$$E[Z] = 2E[X] - 25600 = 2 \cdot 25600p - 25600 = (2p - 1)25600$$

και διασπορά

$$var(Z) = 4 \cdot var(X) = 4 \cdot 25600p^2$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Κεντρικού Ορίου έχουμε ότι

$$P(\text{ο } A \text{ κερδίζει}) = P(Z \geq 538) \simeq 1 - P(Z \leq 538) = 1 - \Phi\left(\frac{538 - 25600(2p - 1)}{\sqrt{var(Z)}}\right) \geq 0.5$$

Για να ισχύει αυτό το όρισμα της $\Phi()$ πρέπει να είναι το πολύ μηδέν, άρα

$$538 \leq 25600(2p - 1) \Rightarrow p > 0.5105$$