

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Αιδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:
Στοχαστικές Διαδικασίες Αφίξεων Bernoulli και Poisson.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/04/2007

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/05/2007

Άσκηση 1. Για να εξοικονομήσει λεφτά για τις σπουδές του, ο Κώστας εργάζεται ως πλάσιέ δειγμάτων τροφών για σκύλους. Πηγαίνει από πόρτα σε πόρτα αλλά αφήνει το δείγμα μόνο όταν του ανοίγουν την πόρτα και υπάρχει σκύλος στο σπίτι. Σε κάθε επίσκεψή του, η πιθανότητα να του ανοίξουν την πόρτα είναι $3/4$ ενώ η πιθανότητα να ζει σκύλος στο σπίτι είναι $2/3$. Υποθέστε ότι τα γεγονότα "ανοίγει η πόρτα" και "ζει σκύλος στο σπίτι" είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι ο Κώστας δίνει το πρώτο δείγμα στην τρίτη επίσκεψη του σε σπίτι;
- (β) Δεδομένου ότι έχει δώσει ακριβώς 4 δείγματα στις 8 πρώτες επισκέψεις του, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα δώσει το 5ο δείγμα στην 11η επίσκεψη;
- (γ) Ποια η πιθανότητα ότι δίνει το δεύτερο δείγμα στην πέμπτη επίσκεψη του σε σπίτι;
- (δ) Δεδομένου ότι δεν έδωσε το 2ο δείγμα στη 2η επίσκεψη του, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα δώσει το 2ο δείγμα στην 5η επίσκεψη;
- (ε) Λέμε ότι ο Κώστας χρειάζεται νέα προμήθεια δειγμάτων αμέσως μετά την επίσκεψη στο σπίτι όπου αφήνει το τελευταίο του δείγμα. Αν έχει αρχίσει με 2 δείγματα, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα πραγματοποιήσει τουλάχιστον 5 επισκέψεις πριν χρειαστεί νέα προμήθεια;

Άσκηση 2. Ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0$, λαμβάνουμε αιτήσεις αγορών από πελάτες A και B σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες σ.δ. Poisson με ρυθμούς a και b αιτήσεις/ώρα, αντίστοιχα.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι ακριβώς 8 από τις επόμενες 12 αιτήσεις προέρχονται από τον πελάτη A;
 - (β) Ποια η πιθανότητα ότι σε ένα χρονικό διάστημα διάρκειας t ωρών θα φτάσουν συνολικά ακριβώς 7 αιτήσεις;
 - (γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. M , του αριθμού των αιτήσεων του πελάτη A οι οποίες καταφτάνουν πριν την 6η αίτηση του πελάτη B.
- Ο αριθμός των αντικειμένων που αγοράζονται σε κάθε αίτηση μπορεί να είναι 2, ή 3, ή 4 με ίση πιθανότητα, και ανεξάρτητα από αίτηση σε αίτηση αλλά και από ποιον πελάτη προέρχεται η αίτηση.
- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι πρώτες 4 αιτήσεις που φτάνουν αφορούν την αγορά του ίδιου αριθμού αντικειμένων;
 - (ε) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , του χρονικού διαστήματος μέχρις ότου καταφτάσουν 5 αιτήσεις από τον πελάτη A οι οποίες αφορούν 3 αντικείμενα.

Άσκηση 3. Κάνετε ένα ταξίδι σαφάρι στην Αφρική. Ένα από τα αξιοθέατα του ταξιδιού είναι η παρακολούθηση λιονταριών και ελεφάντων που έρχονται να πουν νερό από τον ποταμό Νίγηρα. Τα λιοντάρια φτάνουν στο ποτάμι σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda_l = 8$ την ώρα, ενώ οι ελέφαντες καταφθάνουν σύμφωνα με μία ανεξάρτητη διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda_e = 2$ την ώρα. Την πρώτη μέρα του ταξιδιού σας, φτάνετε στο ποτάμι ελπίζοντας να δείτε πολλά ζώα. Υποθέστε ότι λιοντάρια και ελέφαντες είναι τα μόνα διψασμένα ζώα που επισκέπτονται το ποτάμι.

(α) Έστω N ο συνολικός αριθμός των ζώων που βλέπετε τις 3 πρώτες ώρες. Βρείτε τα μεγέθη $E[N]$ και $var(N)$.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε τον 3ο ελέφαντα πριν το 9ο λιοντάρι;

(γ) Μετά από 3 ώρες έχετε δει 24 λιοντάρια αλλά κανένα ελέφαντα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα δείτε ένα ελέφαντα μέσα στην επόμενη ώρα;

(δ) Έχουν περάσει 6 ώρες από τη στιγμή που αρχίσατε να παρατηρείτε το ποτάμι. Έχετε ήδη δει 53 λιοντάρια αλλά ακόμα κανέναν ελέφαντα. Ποιος είναι ο αναμενόμενος (μέσος) αριθμός λιονταριών που θα δείτε ακόμα πριν δείτε τον πρώτο ελέφαντα;

(ε) Δυστυχώς την πρώτη μέρα ξεχάσατε την ψηφιακή σας κάμερα στο ξενοδοχείο. Επανέρχεστε την επόμενη μέρα λοιπόν και αποφασίζετε να παραμείνετε στο ποτάμι μέχρις ότου έχετε φωτογραφήσει και λιοντάρι και ελέφαντα. Ποιος θα είναι ο αναμενόμενος (μέσος) χρόνος παραμονής σας στο ποτάμι;

(στ) Ο φίλος σας έχει φτάσει στο ποτάμι με την ψηφιακή του κάμερα, γεμάτος χαρά ότι θα βγάλει πολλές ωραίες φωτογραφίες. Δυστυχώς η κάμερα του έπεσε και δεν λειτουργεί σωστά: κάθε φορά που πατάει το κουμπί, η κάμερα δεν λειτουργεί με πιθανότητα 0.1, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Ο φίλος σας επιχειρεί να φωτογραφήσει κάθε φορά που ένα ζώο (λιοντάρι ή ελέφαντας) φτάνει στο ποτάμι. Έστω X ο χρόνος (σε ώρες) έως ότου πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ;