ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων
Στοχαστικές Διαδικασίες Αφίξεων Bernoulli και Poisson

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/04/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/05/2007

Άσκηση 1.

Μια επιτυχής επίσκεψη συμβαίνει με πιθανότητα $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

(α) Ο Κώστας θα δώσει το πρώτο δείγμα στην τρίτη επίσκεψη του σε σπίτι, αν στις δύο πρώτες του επισκέψεις αποτύχει, ενώ η τρίτη είναι επιτυχής. Εφόσον τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, η πιθανότητα της παραπάνω ακολουθίας να συμβεί είναι ίση με:

$$(1-p)(1-)p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(β) Το ζητούμενο απαιτεί να αποτύχει να δώσει δείγμα κατά την ένατη και δέκατη επίσκεψη και να επιτύχει κατά την ενδέκατη επίσκεψη. Για μια διαδικασία Bernoulli το αποτέλεσμα αυτών των τριών επισκέψεων είναι ανεξάρτητα απο τα αποτελέσματα των άλλων επισκέψεων, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι και πάλι:

$$(1-p)(1-)p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(γ) Επιθυμούμε την πιθανότητα όπου L_2, του δευτέρου βαθμού άφιξης χρόνου να ισούται με πέντε επισκέψεις. Γνωρίζουμε ότι p_{L_2} είναι Pascal PMF, έτσι έχουμε:

$$p_{L_2} = \left(\begin{array}{c} 5-1 \\ 2-1 \end{array} \right) p^2(1-p)^{5-2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{8}$$

(δ) Εδώ ζητάμε την δεσμευμένη πιθανότητα όπου η πειραματική τιμή της L_2 ισούται με 5 δεδομένου ότι είναι μεγαλύτερη από 2.

$$\begin{aligned} p_{L_2|L_2>2}(5|L_2>2) &= \frac{p_{L_2}(5)}{P(L_2>2)} = \frac{p_{L_2}(5)}{1-p_{L_2}(2)} \\ &= \frac{\left(\begin{array}{c} 5-1 \\ 2-1 \end{array} \right) p^2(1-p)^{5-2}}{1-\left(\begin{array}{c} 2-1 \\ 2-1 \end{array} \right) p^2(1-p)^0} = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(ε) Η πιθανότητα όπου ο Κώστας θα συμπληρώσει τουλάχιστον πέντε επισκέψεις προτού χρειαστεί νέα προμήθεια ισούται με την πιθανότητα η πειραματική τιμή της L_2 να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 5.

$$\begin{aligned} P(L_2 \geq 5) &= 1 - P(L_2 \leq 4) = 1 - \sum_{l=2}^{4} \left(\begin{array}{c} l-1 \\ 2-1 \end{array} \right) p^2(1-p)^{l-2} \\ &= 1 - (\frac{1}{2})^2 - \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) (\frac{1}{2})^3 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) (\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

(α) Γνωρίζουμε ότι αν κοιτάξουμε μέσα σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δ, τότε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\text{Η αίτηση ανήκει στον Α}\}|\{\text{Μια αίτηση φτάνει}\}) \\ &= \frac{P(\{\text{Μια αίτηση από τον Α φτάνει}\})}{P(\{\text{Μια αίτηση φτάνει}\})} \\ &= \frac{a\delta}{(a+b)\delta} \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

Οπότε $P(8 \text{ από τις } 12 \text{ αιτήσεις είναι από τον πελάτη Α}) = \binom{12}{8}\left(\frac{a}{a+b}\right)^8\left(\frac{b}{a+b}\right)^4$

(β) Παρατηρούμε δύο πράγματα, πρώτον ότι ζητήται η συνδιασμένη διαδικασία Α και Β (αιτήσεις), η οποία έχει ρυθμό $a+b$, και δεύτερον ότι ζητήται για $P(7,t)$ με ρυθμό $\lambda = a+b$. Έτσι η απάντηση είναι:

$$\frac{((a+b)t)^7 e^{-(a+b)t}}{7!}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\{M = m\} = \{m \text{ αιτήσεις από τον Α σε } m+5 \text{ συνολικές αιτήσεις}; m+6\text{η αίτηση του Β}\}$$

Χρησιμοποιώντας την ' έλλειψη μνήμης ' της Poisson διαδικασίας:

$$\begin{aligned} P(M=m) &= P(m \text{ αιτήσεις από τον Α σε } m+5 \text{ συνολικές αιτήσεις})P(m+6\text{η αίτηση είναι τύπου Β}) \\ &= p_M(m) = \binom{m+5}{5}\left(\frac{b}{a+b}\right)^6\left(\frac{a}{a+b}\right)^m, m = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Για να βρούμε την μέση τιμή και την διασπορά της τ.μ. Μ μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε την άμεση εφαρμογή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, είτε παρατηρώντας ότι:

$$M = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$$

όπου X_i είναι μια τυχαία μεταβλητή για το πλήθος των αιτήσεων μετά από την $i-1$-οστή και πριν από την i-οστή αίτηση του Β. Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η X_i είναι μια IID τυχαία μεταβλήτη με γεωμετρική κατανομή ολισθημένη κατά 1 με παράμετρο $p = 1 - P(A) = \frac{b}{a+b}$. Έτσι:

$$E[M] = 6E[X] = 6\left(\frac{a+b}{b} - 1\right) = \frac{6a}{b}$$

και

$$var(M) = 6var(X) = \frac{6a(a+b)}{b^2}$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(2 \text{ αντικείμενα ζητήθηκαν}) = P(3 \text{ αντικείμενα ζητήθηκαν}) = P(4 \text{ αντικείμενα ζητήθηκαν}) = \frac{1}{3}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} P(\text{οι πρώτες 4 αιτήσεις ζητάνε τον ίδιο αριθμό αντικειμένων}) &= P(4 \text{ αιτήσεις ζητάνε 2 αντικ.}) + \\ &\quad P(4 \text{ αιτήσεις ζητάνε 3 αντικ.}) + \\ &\quad P(4 \text{ αιτήσεις ζητάνε 4 αντικ.}) \\ &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ε) Ο ευκολότερος τρόπος για να απαντήσουμε στο ζητούμενο είναι να σκεφτούμε τη διάσπαση Poisson διαδικασιών. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια νέα διεργασία διασπώντας την αρχική διαδικασία A με διαστήματα να είναι 3 αντικείμενα αιτήσεις από το B. Παρατηρήστε ότι η νέα διεργασία έχει ρυθμό ίσο με:

$$P(3 \text{ αντικείμενα αιτήσεις}) \cdot (\text{αρχικός ρυθμός αιτήσεων}) = \frac{1}{3}a$$

Όποτε η Q είναι απλά η πέμπτη τάξη erlang rv με παράμετρο $\frac{1}{3}a$

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^5 x^4 e^{-\frac{1}{3}ax}}{4!}, x \geq 0$$

Άσκηση 3.

(α) Εφόσον τα λιοντάρια και οι ελέφαντες είναι τα μόνα ζώα που επισκέπτονται το ποτάμι, τότε η διαδικασία με την οποία τα ζώα καταφθάνουν είναι η συνδιασμένη διαδικασία της διαδικασίας των λιονταριών και της διαδικασίας των ελεφάντων. Εφόσον η διαδικασία των λιονταριών και η διαδικασία των ελεφάντων είναι ανεξάτητες διαδικασίες τύπου Poisson με $\lambda_l = 8$ και $\lambda_e = 2$ αντιστοίχως, τότε και η διαδικασία με την οποία τα ζώα καταφθάνουν είναι μια Poisson διαδικασία με ρυθμό $\lambda_a = \lambda_l + \lambda_e = 10$. Όπότε ο συνολικός αριθμός των ζώων που φτάνουν στο ποτάμι τις τρεις πρώτες ώρες είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την Poisson κατανομή με παράμετρο $\lambda_a \cdot 3 = 30$. Όποτε:

$$E[\text{ο συνολικός αριθμός των ζώων τις τρεις πρώτες ώρες}] = \lambda_a \cdot 3 = 30$$

και

$$var(\text{ο συνολικός αριθμός των ζώων τις τρεις πρώτες ώρες}) = \lambda_a \cdot 3 = 30$$

(β) Κάθε άφιξη ζώου μπορεί να είναι είτε η άφιξη ενός ελέφαντα, είτε η άφιξη ενός λιονταριού. Αν υποθέσουμε ότι E_k δηλώνει το γεγονός ότι το κ-οστό ζώο που φτάνει στο ποτάμι είναι ελέφαντας. Γνωρίζούμε ότι:

$$P(E_k) = \frac{\lambda_e}{\lambda_l + \lambda_e} = \frac{1}{5}$$

και ότι τα γεγονότα $E_1, E_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητα. Θεωρώντας την άφιξη του ελέφαντα ως 'επιτυχία' σχηματίζεται μια διαδικασία Bernoulli με παράμετρο $p = \frac{1}{5}$. Προφανώς, το να παρατηρήσουμε τον τρίτο ελέφαντα πρίν από το ένατο λιοντάρι είναι ισοδύναμο με το να παρατηρήσουμε τον τρίτο ελέφαντα πρίν από τις 12 η ώρα στην παραπάνω διαδικασία Bernoulli. Αν υποθέσουμε ότι με T_3 ορίζουμε την χρονική στιγμή της άφιξης του τρίτου ελέφαντα στην διαδικασία Bernoulli.

$$\begin{aligned}
P[\ T_3 < 12\ ] &= \sum_{k=3}^{11} P[\ T_3 = k\ ] \\
&= \sum_{k=3}^{11} \binom{k-1}{2} p^3 (1-p)^{k-3} \\
&= \sum_{k=3}^{11} \binom{k-1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-3}
\end{aligned}$$

(γ) Εφόσον η διαδικασία άφιξης ενός λιονταριού είναι ανεξάρτητη από την διαδικασία άφιξης ενός ελέφαντα, τότε το γεγονός 'αρκετά λιοντάρια φτάνουν με το τέλος των τριών ωρών' είναι ανεξάρτητο με κάθε γεγονός που ορίζεται με την διαδικασία άφιξης ενός ελέφαντα. Έστω T_1 ορίζει την χρονική στιγμή της πρώτης άφιξης ενός ελέφαντα. Τότε η επιθυμητή πιθανότητα οριζεται ως:

$$\begin{aligned}
P(\text{Ένας ελέφ. φτάνει την 4η ώρα} \mid \text{κανένας ελέφ. μέσα σε 3 ώρες}) &= P[\ T_1 \leq 4 \mid T_1 > 3\ ] \\
&= 1 - P[\ T_1 > 4 \mid T_1 > 3\ ] \\
&= 1 - P[\ T_1 > 1\ ](3) \\
&= 1 - e^{-2}
\end{aligned}$$

Το βήμα (3) οφείλεται την ' έλλειψη μνήμης ' της διαδικασίας Poisson

(δ) Όπως είπαμε και στο ερώτημα (β), θεωρώντας την άφιξη του ελέφαντα ως 'επιτυχία' σχηματίζουμε μια διαδικασία Bernoulli με παράμετρο $p = \frac{1}{5}$. Γνωρίζοντας την ' έλλειψη μνήμης ' και δεδομένου ότι δεν έχουμε 'επιτυχία' στις πρώτες 53 δοκιμές (έχουμε δει 53 λιοντάρια, αλλά όχι ελέφαντα), το πλήθος των δοκιμών, X_1, που περιλαμβάνει και την πρώτη 'επιτυχία' είναι ακόμα μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p = \frac{1}{5}$. Εφόσον ο αριθμός των 'αποτυχιών' πρίν από την πρώτη 'επιτυχία' είναι η $X_1 - 1$, τότε

$$E[\text{αριθμός των λιονταριών πριν τον 1ο ελεφ.}] = E[X_1 - 1] = \frac{1}{p} - 1 = 4$$

(ε) Έστω T_l(αντιστοίχως T_e) η χρονική στιγμή της πρώτης άφιξης του λιονταριού (αντιστοίχως του ελέφαντα). Ο χρόνος S μέχρι να φωτογραφήσετε και λιοντάρι και ελέφαντα ισούται με $\max\{T_l, T_e\}$. Εκφράζουμε το S σε δύο μέρη:

$$S = \max\{T_l, T_e\} = \min\{T_l, T_e\} + (\max\{T_l, T_e\} - \min\{T_l, T_e\}) = S_1 + S_2,$$

όπου $S_1 = \min\{T_l, T_e\}$ είναι η χρονική στιγμή της πρώτης άφιξης ενός ζώου και $S_2 = \max\{T_l, T_e\} - \min\{T_l, T_e\}$ είναι ο επιπλέον χρόνος μέχρι και στα δύο είδη ζώων να καταγραφεί μια άφιξη. Εφόσον η διαδικασία άφιξης είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό 10,

$$E[S_1] = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_e}.$$

Όσον αφορά το S_2 υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. Η πρώτη άφιξη είναι ενός λιονταριού, η οποία συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{\lambda_l}{\lambda_l+\lambda_e}$. Τότε περιμένουμε για την άφιξη ενός ελέφαντα, η οποία λαμβάνει κατά μέσο όρο $\frac{1}{\lambda_e}$ χρόνο.
2. Η πρώτη άφιξη είναι ενός ελέφαντα, η οποία συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{\lambda_e}{\lambda_l+\lambda_e}$. Τότε περιμένουμε για την άφιξη ενός ελέφαντα, η οποία λαμβάνει κατά μέσο όρο $\frac{1}{\lambda_l}$ χρόνο.

Λαμβάνωντας όλα αυτά υπόψιν μας, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{1}{\lambda_l + \lambda_e} + \frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_e} \cdot \frac{1}{\lambda_e} + \frac{\lambda_e}{\lambda_l + \lambda_e} \cdot \frac{1}{\lambda_l} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{21}{40}. \end{aligned}$$

(στ) Η τυχαία μεταβλητή X δηλώνει το χρόνο έως ότου πάρει την τρίτη επιτυχή φωτογραφία ενός ελέφαντα. Εφόσον η διαδικασία άφιξης των λιονταριών είναι ανεξάρτητη από την διαδικασία άφιξης των ελεφάντων, μπορούμε να επικεντρωθούμε στην διαδικασία άφιξης των ελεφάντων. Χωρίζουμε την διαδικασία άφιξης των ελεφάντων σε δύο διαδικασίες, η μια αποτελείται από τις επιτυχημένες φωτογραφίες των ελεφάντων (την οποία θα αποκαλούμε 'διαδικασία άφιξης επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες ') και την άλλη η οποία αποτελείται από τις μη επιτυχημένες φωτογραφίες των ελεφάντων (την οποία θα αποκαλούμε 'διαδικασία άφιξης μη επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες '). Εφόσον η ποιότητα κάθε φωτογραφίας είναι ανεξάρτητη από κάθε άλλη, η διαδικασία άφιξης επιτυχημένων φωτογραφιών με ελέφαντες είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda_{se} = 0.9 \cdot \lambda_e$. Οπότε, η X είναι η τρίτη χρονική άφιξη μιας διαδικασίας άφιξης επιτυχημένης φωτογραφίας με ελέφαντα. Έτσι η X έχει την ακόλουθη Erlang κατανομή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(0.9 \cdot 2)^3 x^2 e^{-1.8x}}{2} & x > 0, \\ 0 & \text{αλλίως.} \end{cases}$$