

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων: Αλυσίδες Markov (1)

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/05/2007

Ημερομηνία Παράδοσης: 04/06/2007

Άσκηση 1. Σε μία ακολουθία εξαρτημένων δοκιμών Bernoulli (0 ή 1), η πιθανότητα επιτυχίας (1) σε κάποια δοκιμή δίνεται από $(k+1)/(k+3)$, όπου k είναι το πλήθος των επιτυχιών στις προηγούμενες 3 δοκιμές. Ορίστε τις καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov που περιγράφει αυτό το πείραμα ως S_{ijl} , όπου η τριπλέτα (i, j, l) αναπαριστά το αποτέλεσμα των 3 τελευταίων δοκιμών με το l να αντιστοιχεί στην πιο πρόσφατη. Δώστε το γράφημα της αλυσίδας και υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης.

Άσκηση 2. Για κάθε έναν από τους ακόλουθους ορισμούς της κατάστασης X_k ενός συστήματος σε χρόνο k , ($k = 1, 2, \dots$), αιτιολογήστε αν η Μαρκοβιανή ιδιότητα ικανοποιείται, και αν ναι, δώστε το σύνολο των καταστάσεων και υπολογίστε τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

(α) Ένα δίκαιο εξάεδρο ξάρι ρίχνεται συνεχώς.

- i. Η X_k συμβολίζει το μεγαλύτερο αριθμό που έρχεται στις πρώτες k ρίψεις.
- ii. Η X_k συμβολίζει το πλήθος των 6 που έρχονται στις πρώτες k ρίψεις.
- iii. Τη χρονική στιγμή k , η X_k συμβολίζει το πλήθος των ρίψεων από την πιο πρόσφατη ρίψη που έφερε 6.

(β) Τη χρονική στιγμή k , έστω Y_k η κατάσταση μιας αλυσίδας Markov με γνωστές πιθανότητες μετάβασης q_{ij} .

- i. Για γνωστό ακέραιο $r > 0$, $X_k = Y_{r+k}$.
- ii. $X_k = Y_{2k}$.

Άσκηση 3. Η Μαρία έχει δύο κέρματα. Το κέρμα Α φέρνει κεφαλή (Κ) με πιθανότητα a , ενώ το κέρμα Β φέρνει κεφαλή με πιθανότητα b . Αν στην n -στή ρίψη η Μαρία φέρει κεφαλή, στην $(n+1)$ -στή ρίψη θα χρησιμοποιήσει το κέρμα Α, αλλιώς θα χρησιμοποιήσει το κέρμα Β. Ορίστε τις καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη αυτού του πειράματος, υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης, δώστε το γράφημα, και υπολογίστε την οριακή κατανομή της αλυσίδας. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η k -στή ρίψη θα φέρει κεφαλή, για k αρκετά μεγάλο;