ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

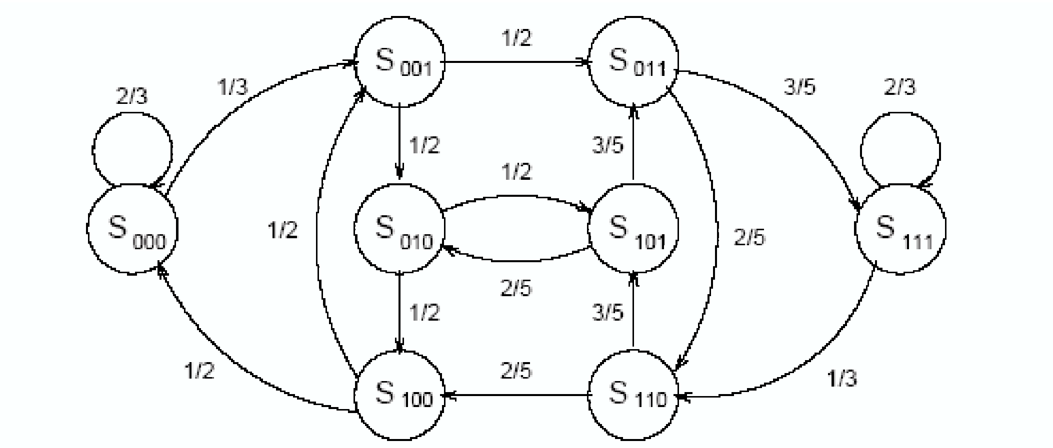
ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων: Αλυσίδες Markov (1)

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/05/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 04/06/2007

Άσκηση 1.

Εφόσον η πιθανότητα επιτυχίας εξαρτάται από τα αποτελέσματα των τριών προηγούμενων δοκιμών, χρειαζόμαστε μια ξεχωριστή κατάσταση για κάθε δυνατό αποτέλεσμα στις προηγούμενες τρεις δοκιμές. Έτσι λοιπόν χρειαζόμαστε $2^3 = 8$ καταστάσεις. Κάθε κατάσταση την προσδιορίζουμε ως S_{ijl}, όπου η τριπλέττα (i, j, l) αναπαριστά το αποτέλεσμα των τριών τελευταίων δοκιμών, με l να είναι η πιο πρόσφατη δοκιμή. Κάθε τμήμα της τριπλέττας έχει τιμή 1, αν η δοκιμή ήταν επιτυχής, και τιμή 0, αν ήταν ανεπιτυχής.
Τώρα μπορούμε πολύ εύκολα να σχεδιάσουμε το διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1. Παρατηρείστε ότι η πιθανότητα μετάβασης μεταξύ δύο καταστάσεων είναι $\frac{k+1}{k+3}$, όπου k είναι το πλήθος των επιτυχιών στις προηγούμενες τρείς δοκιμές, αν η μετάβαση οδηγεί σε επιτυχία, και $\frac{2}{k+3}$, αν η μετάβαση οδηγεί σε αποτυχία.



Σχήμα 1: Το γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας για την άσκηση 1.

Άσκηση 2.

(α) **i.** Εφόσον η κατάσταση X_k είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που έρχεται στις πρώτες k ρίψεις, το σύνολο των καταστάσεων είναι $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Η πιθανότητα του μεγαλύτερου αριθμού που έρχεται στις πρώτες $(k + 1)$ δοκιμές εξαρτάται μονάχα από το ποίος ήταν ο μεγαλύτερος αριθμός που ήρθε στις πρώτες k δοκιμές. Αυτό ικανοποιεί την Μαρκοβιανή υπόθεση. Οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται από:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & , j < i \\ \frac{i}{6} & , j = i \\ \frac{1}{6} & , j > i \end{cases}$$

ii. Εφόσον η κατάσταση X_k είναι το πλήθος των 6 που έρχονται στις πρώτες k ρίψεις, το σύνολο των καταστάσεων είναι $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Η πιθανότητα να έρθει 6 σε κάθε ρίψη είναι $\frac{1}{6}$. Το πλήθος των 6 που έρχονται στις πρώτες $(k + 1)$ δοκιμές εξαρτάται μονάχα από το πλήθος των 6 που έχουν έρθει στις πρώτες k δοκιμές. Αυτό ικανοποιεί την Μαρκοβιανή υπόθεση. Οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται από:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6} & , j = i+1 \\ \frac{5}{6} & , j = i \\ 0 & , \text{αλλίως} \end{cases}$$

iii. Εφόσον η κατάσταση X_k είναι το πλήθος των ρίψεων από την πιο πρόσφατη ρίψη που έφερε 6, το σύνολο των καταστάσεων είναι $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Αν η ρίψη του ζαριού φέρει 6 στην επόμενη δοκιμή η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση 0. Αν όχι, η κατάσταση μεταβαίνει σε μια υψηλότερη κατάσταση. Έτσι λοιπόν, η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση εξαρτάται με το παρελθόν μόνο μέσο την τωρινής κατάστασης. Αυτό ικανοποιεί την Μαρκοβιανή υπόθεση. Οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται από:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6} & , j = 0 \\ \frac{5}{6} & , j = i+1 \\ 0 & , \text{αλλίως} \end{cases}$$

(β) **i.** Για $X_k = Y_{r+k}$ και από την Μαρκοβιανή υπόθεση του Y έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = j | X_k = i, \ldots, X_0 = i_0) &= P(Y_{r+k+1} = j | Y_{r+k} = i, \ldots, Y_r = i_r) \\ &= P(Y_{r+k+1} = j | Y_{r+k} = i) \\ P(X_{k+1} = j | X_k = i, \ldots, X_0 = i_0) &= P(X_{k+1} = j | X_k = i) \end{aligned}$$

Αυτό ικανοποιεί την Μαρκοβιανή υπόθεση για το X. Μπορούμε ακόμα να δούμε ότι η s.d. X_k είναι η s.d. Y_k καθυστερημένη κατά r. Συνεπώς πρέπει να έχουν τις ίδιες πιθανότητες μετάβασης p_{ij}, όποτε έχουμε:

$$p_{ij} = q_{ij}$$

ii. Για $X_k = Y_{2k}$ και από την Μαρκοβιανή υπόθεση του Y έχουμε:

$$\begin{aligned} &P(X_{k+1} = j | X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_0 - i_0) \\ &= P(Y_{2k+2} = j | Y_{2k} = i, Y_{2k-2} = i_{2k-2}, \ldots, Y_0 = i_0) \\ &= P(Y_{2k+2} = j | Y_{2k} = i) \\ &= P(X_{k+1} = j | X_k = i) \end{aligned}$$

Αυτό ικανοποιεί την Μαρκοβιανή υπόθεση για το X. Οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται από:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{k+1} = j | X_k = i) \\ &= P(Y_{2k+2} = j | Y_{2k} = i) \\ &= r_{i,j}^k(2) \end{aligned}$$

όπου $r_{i,j}^k(2)$ είναι η πιθανότητα μετάβασης $k-$οστής τάξης για την s.d. Y_k.

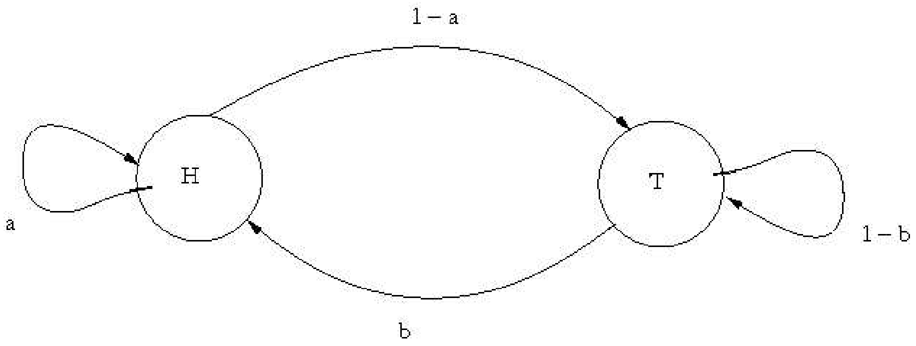
Άσκηση 3.

Θα μοντελοποιήσουμε την ρίψη των κερμάτων με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις $\{H, T\}$. Γνωρίζουμε ότι $p_{HH} = \alpha, p_{HT} = 1 - \alpha, p_{TH} = b, p_{TT} = 1 - b$. Το γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας για αυτό το πείραμα φαίνεται στο σχήμα 2. Ζητείται να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι η k-οστή ρίψη θα φέρει κεφαλή,για k αρκετά μεγάλο. Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας μας δίνουν ότι:

$$p_{HT}\pi_H = p_{TH}\pi_T$$

όπου π_H είναι η πιθανότητα της μόνιμης κατάστασης (steady state), όπου η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα βρίσκεται στην κατάσταση H, και ομοίως για την π_T, οπότε έχουμε:

$$\pi_H = \alpha\pi_H + b\pi_T \quad (1)$$



Σχήμα 2: Το γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας για την άσκηση 3.

και

$$\pi_T = (1-\alpha)\pi_H + (1-b)\pi_T \tag{2}$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι

$$\pi_H + \pi_T = 1 \tag{3}$$

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις 1, 2 και 3 έχουμε:

$$\pi_H = \frac{b}{1-\alpha+b}$$