

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων: Αλυσίδες Markov (2)

Ημερομηνία Ανάθεσης: 06/06/2007

Ημερομηνία Παράδοσης: 18/06/2007

Άσκηση 1. Οι διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος είναι εξαρτημένες μεταξύ τους και έχει βρεθεί ότι ακολουθούν τις εξής δεσμευμένες πιθανότητες:

$$P(H_{n+1}/H_n) = 3/4, \quad P(T_{n+1}/T_n) = 2/3,$$

όπου H_n : Κεφαλή στην n -στή ρίψη και T_n : Γράμματα στην n -στή ρίψη. Έστω ότι η πρώτη ρίψη έφερε κεφαλή.

- (α) Ορίστε τις καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov που περιγράφει αυτό το πείραμα, δώστε το γράφημα της αλυσίδας, υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης και την οριακή κατανομή.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι θα έρθουν γράμματα για πρώτη φορά στην k -στή ρίψη ($k = 2, 3, 4, \dots$).
- (γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η ρίψη 5000 θα φέρει κεφαλή;
- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι ρίψεις 5000 και 5002 θα φέρουν και οι δύο κεφαλή;
- (ε) Έστω ότι οι ρίψεις $5001, 5002, \dots, 5000 + m$ φέρουν όλες το ίδιο αποτέλεσμα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι όλες οι ρίψεις φέρουν κεφαλή; Υπολογίστε το όριο αυτής της δεσμευμένης πιθανότητας καθώς το m τείνει στο άπειρο.

Άσκηση 2. Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με επτά καταστάσεις $\{S_1, \dots, S_7\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 4/10 & 2/10 & 0 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Αρχικά το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση S_3 .

- (α) Υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. J , του αριθμού των μεταβάσεων έως και την μετάβαση κατά την οποία το σύστημα εγκαταλείπει οριστικά την κατάσταση S_3 .
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. K , του αριθμού των μεταβάσεων έως και την μετάβαση κατά την οποία το σύστημα επισκέπτεται την κατάσταση S_4 για πρώτη φορά.
- (γ) Υπολογίστε την οριακή κατανομή της αλυσίδας, π_i , $i = 1, 2, \dots, 7$.
- (δ) Δεδομένου του γεγονότος ότι το σύστημα δεν θα επισκεφτεί ποτέ την κατάσταση S_4 , υπολογίστε και πάλι την οριακή κατανομή.

Άσκηση 3. Η απόδοση της ομάδας ποδοσφαίρου του ΑΡΗ είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ηθικό των παιχτών της. Αν η ομάδα έχει κερδίσει τα τελευταία δύο παιχνίδια, τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.7. Αν έχει χάσει το τελευταίο παιχνίδι αλλά έχει κερδίσει το προ-τελευταίο, τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.4. Αν έχει κερδίσει το τελευταίο παιχνίδι αλλά έχει χάσει το προ-τελευταίο, τότε κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.6. Τέλος, αν έχει χάσει τα τελευταία δύο παιχνίδια, έχει πιθανότητα μόνο 0.3 να κερδίσει το επόμενο. Κανένα παιχνίδι δεν τελειώνει σε ισοπαλία. Όταν αρχίζετε να παρατηρείτε, η ομάδα έχει κερδίσει δύο διαδοχικά παιχνίδια.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τον μικρότερο αριθμό καταστάσεων που περιγράφει πλήρως την απόδοση της ομάδας. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

Για τις επόμενες ερωτήσεις, είναι χρήσιμο να αριθμήσετε τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Επίσης ορίστε ως X_n το αποτέλεσμα του n -στου παιχνιδιού.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη ήττα θα ακολουθηθεί από άλλη μία ήττα;

(γ) Έστω Y ο αριθμός των παιχνιδιών που παίζονται μέχρι την πρώτη ήττα της ομάδας (χωρίς να μετράται η ήττα). Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y ;

(δ) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η ομάδα θα κερδίσει το 1000-στο παιχνίδι, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα του 1000-στου και 1001-στου παιχνιδιών είναι τα ίδια;

(στ) Έστω T ο αριθμός των παιχνιδιών μέχρι και την 2η συνεχόμενη ήττα της ομάδας. Γράψτε ένα σύστημα εξισώσεων για την εύρεση του $E[T]$.

(ζ) Ο προπονητής αποφασίζει ότι θα παραιτηθεί αμέσως μετά την 3η συνεχόμενη ήττα της ομάδας. Έστω N ο αριθμός των παιχνιδιών στα οποία θα κοουτσάρει την ομάδα. Γράψτε ένα σύστημα εξισώσεων για την εύρεση του $E[N]$.