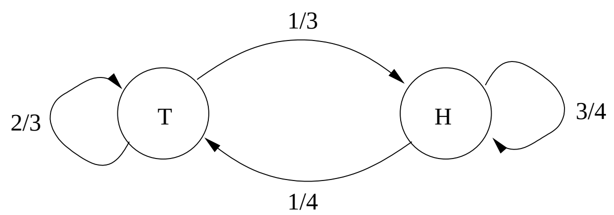
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων: Αλυσίδες Markov (1)

Ημερομηνία Ανάθεσης: 06/06/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/06/2007

Άσκηση 1.



Σχήμα 1: Το Μαρκοβιανό μοντέλου της άσκησης 1.

(α) Τα αποτελέσματα των διαδοχικών ρίψεων ενός νομίσματος μπορούν να περιγραφούν ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δυο καταστάσεις T και H, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1. Οι πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας είναι:

$$\begin{aligned} P(T \to H) &= \frac{1}{3} \\ P(T \to T) &= \frac{2}{3} \\ P(H \to H) &= \frac{3}{4} \\ P(H \to T) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

και η οριακή κατανομή της είναι $\pi_H = 4/7$ και $\pi_T = 3/7$, τις οποίες υπολογίσαμε λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} \pi_T P(T \to H) + \pi_H P(H \to H) &= \pi_H \\ \pi_T + \pi_H &= 1 \end{aligned}$$

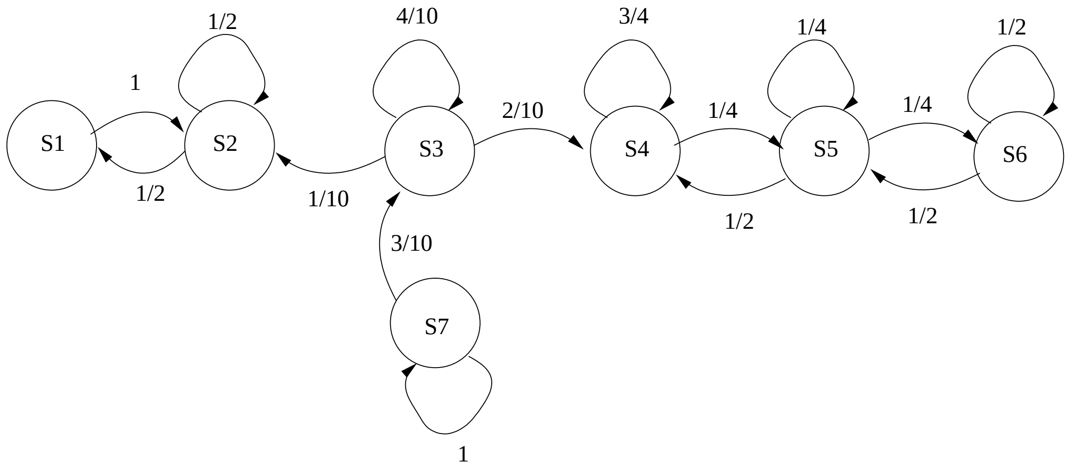
(β) Θεωρήσουμε ότι $X_k, k = 1, \cdots$ είναι τα αποτελέσματα των ρίψεων. Για $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} & P(\text{1η φορά που έρχονται γράμματα στην } k\text{−οστή ρίψη} | X_1 = H) \\ &= P(\text{οι πρώτες } k-2 \text{ μεταβάσεις είναι } H \to H \text{ και η τελευταία είναι } H \to T) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(γ) Ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση η $P(X_{500} = H) \approx \pi_H = 4/7$, όπως δείξαμε στο ερώτημα (α).

(δ)

$$\begin{aligned} P(X_{5000} = H, X_{5002} = H) &= P(X_{5000} = H) P(X_{5002} = H | X_{5000} = H) \\ &\approx \pi_H P(X_{5002} = H | X_{5000} = H) \\ &= \pi(P(H \to T)P(T \to H) + P(H \to H)P(H \to H)) \\ &= \frac{4}{7}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{124}{336} \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Το Μαρκοβιανό μοντέλου της άσκησης 2.

(ε)

$$\begin{aligned}
&P(X_{5001} = \cdots = X_{5000+m} = H | X_{5001} = \cdots = X_{5000+m}) \\
=& \frac{P(X_{5001} = \cdots = X_{5000+m} = H)}{P(X_{5001} = \cdots = X_{5000+m} = H) + P(X_{5001} = \cdots = X_{5000+m} = T)} \\
=& \frac{P(X_{5001} = H)P(H \to H)^{m-1}}{P(X_{5001} = H)P(H \to H)^{m-1} + P(X_{5001} = T)P(T \to T)^{m-1}} \\
\to& \ 1 \text{ καθώς } m \to \infty
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο σχήμα 2

(α) Η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 3 αμέσως πριν από την πρώτη μετάβαση. Αφού φύγει από την κατάσταση 3 για πρώτη φορά, η διαδικασία δεν μπορεί να επιστρέψει ξανά στην κατάσταση 3. Έτσι η J, η οποία αναπαραστά το πλήθος των μεταβάσεων μέχρι και την μετάβαση κατά την οποία η διαδικασία φεύγει από την κατάσταση 3 για τελευταία φορά είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με πιθανότητα επιτυχίας ίση με 0.6. Η διασπορά της J δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_J^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{10}{9}$$

(β) Υπάρχει θετική πιθανότητα με μην επισκεφτούμε ποτέ την κατάσταση 4, $P(K < \infty) < 1$. Έτσι η αναμενόμενη τιμή του K είναι ∞.

(γ) Η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τρεις περιοδικές κλάσης. Η πρώτη περιοδική κλάση αποτελείται από καταστάσεις $\{1, 2\}$, η δεύτερη περιοδική κλάση από την κατάσταση $\{7\}$ και η τρίτη περιοδική κλάση αποτελείται απο τις καταστάσεις $\{4, 5, 6\}$. Η πιθανότητα να απορροφηθείς από την πρώτη περιοδική κλάση ξεκινώντας από την μεταβατική κατάσταση 3 είναι:

$$\frac{1/10}{1/10 + 2/10 + 3/10} = \frac{1}{6}$$

όπου η πιθανότητα μετάβασης στην πρώτη περιοδική κλάση είναι η τυχαιότητα της κατάστασης. Ομοίως, η πιθανότητα να απορροφηθείς στην δεύτερη και τρίτη περιοδική κλάση είναι $\frac{3}{6}$ και $\frac{2}{6}$ αντίστοιχα.

Τώρα, θα επιλύσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας μέσα σε κάθε περιοδική κλάση, οι οποίες θα μας δώσουν την δεσμευμένη πιθανότητα να απορροφηθούμε από την κατάσταση 3 στην περιοδική κλάση. Οι αδέσμευτες πιθανότητες ήρεμης κατάστασης (steady–state) βρίσκονται με την τοποθετώντας ως βάρος στις δεσμευμένες πιθανότητες ήρεμης κατάστασης την πιθανότητα απορρόφησης στην περιοδική κλάση.

Η πρώτη περιοδική κλάση είναι μια διαδικασία birth-death. Γράφωντας τις ακόλουθες εξισώσεις και λύνοντας ως προς τις δεσμευμένες πιθανότητες , p_1 και p_2

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{p_2}{2} \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε $p_1 = \frac{1}{3}$ και $p_2 = \frac{2}{3}$. Για την δεύτερη αναδρομική κλάση, $p_7 = 1$, ενώ για την τρίτη αναδρομική κλάση είναι επίσης μια διαδικασία birth-death, οπότε βρίσκουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες ήρεμης κατάστασης ως εξής:

$$\begin{aligned} p_4 &= 2p_5 \\ p_5 &= 2p_6 \\ p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \end{aligned}$$

οπότε έχουμε $p_4 = \frac{4}{7}, p_5 = \frac{2}{7}, p_6 = \frac{1}{7}$.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα, οι αδέσμευτες πιθανότητες της κατάστασης ηρεμίας για όλες τις καταστάσεις βρίσκονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \\ \pi_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} \\ \pi_3 &= 0(\text{κατάσταση μετάβασης}) \\ \pi_7 &= 1 \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{6} \\ \pi_4 &= \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{21} \\ \pi_5 &= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{21} \\ \pi_6 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

(δ) Με δεδομένο το γεγονός ότι η διαδικασία δεν επιστρέφει ποτέ στην κατάσταση 4, αλλάζει οι πιθανότητες απορρόφησης για τις περιοδικές κλάσεις. Η πιθανότητα να απορροφηθείς από την πρώτη περιοδική κλάση είναι $\frac{1}{4}$, από την δεύτερη περιοδική κλάση είναι $\frac{3}{4}$, και από την τρίτη περιοδική κλάση είναι 0. Έτσι οι πιθανότητες της κατάστασης ηρεμίας δίνονται:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \pi_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \\ \pi_3 &= \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 0 \\ \pi_7 &= 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

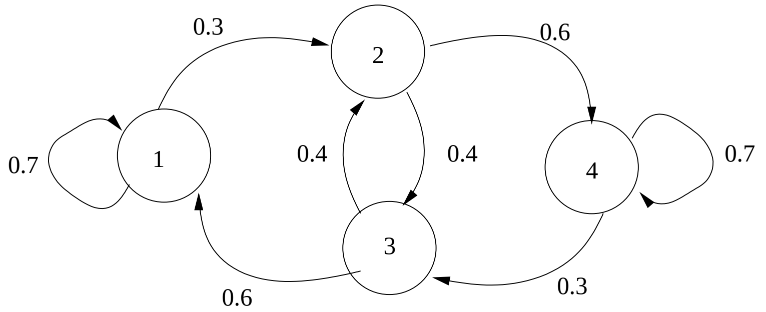
Άσκηση 3.

(α) Η απόδοση της ομάδας μπορεί να περιγραφεί από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, όπου η κατάσταση ορίζεται ως:

(αποτέλεσμα του προτελευταίου παιχνιδιού, αποτέλεσμα του τελευταίου παιχνιδιού).

Συνεπώς υπάρχουν 4 δυνατές καταστάσεις:

$$\{1(WW), 2(WL), 3(LW), 4(LL)\}$$



Σχήμα 3: Το Μαρκοβιανό μοντέλου της άσκησης 3, ερώτημα (α).

όπου W : νίκη και L :ήττα. Το γράφημα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 3. Ο πίνακας πιθανότητας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = [p_{ij}]_{4x4}$$

(β) Προφανώς, όταν η ακολουθία διαδοχικών νικών της ομάδας διακόπτεται, το σύστημα είναι στην κατάσταση 2 (WL). Συνεπώς, η πιθανότητα να χάσει και το επόμενο παιχνίδι είναι 0.6, δηλαδή η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση 1 (WL) στην 4(LL).

(γ) Προφανώς η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \cdot$. Η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= P(Y = k) \\ &= P(X_{k+1} = L, X_k = \cdots = X_1 = W | X_0 = X_{-1} = W) \\ &= p_{11}^k \cdot p_{12} \\ &= \begin{cases} 0.7^k \cdot 0.3 & k = 0, 1, 2 \cdots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \end{aligned}$$

(δ) Η αλυσίδα αποτελείται από μια απεριοδική κλάση επικοινωνίας, επομένως υπάρχει η στασιμή κατανομή της $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4]$ που δίνεται από την λύση των εξισώσεων ισορροπίας $\pi P = \pi$ μαζί με την εξίσωση $\sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1$. Συνεπώς:

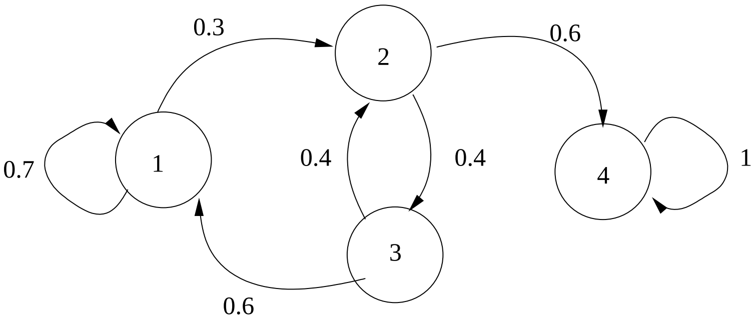
$$[\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$$

(ε) Η επιθυμιτή πιθανότητα είναι:

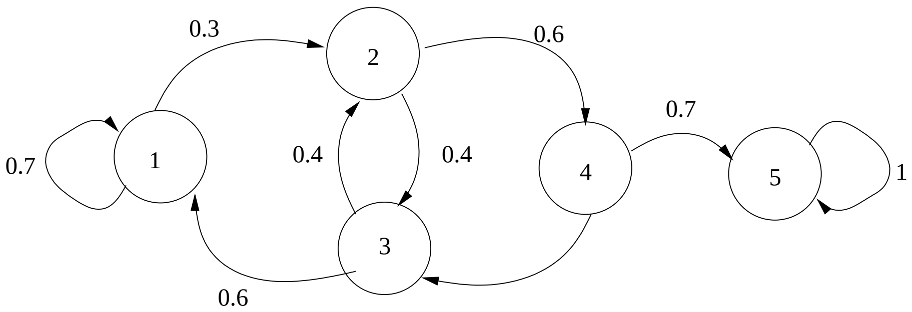
$$\begin{aligned} P[X_{1000} = W | X_{1000} = X_{1001}] &= \frac{P[X_{1000} = X_{1001} = W]}{P[X_{1000} = X_{1001}]} \\ &= \frac{P[X_{1000} = X_{1001} = W]}{P[X_{1000} = X_{1001} + W] + P[X_{1000} = X_{1001} = L]} \\ &\cong \frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(στ) $E[T]$ είναι ο μέσος χρόνος έως την πρώτη επίσκεψη της κατάστασης 4 ξεκινώντας από την 1. Ορίζουμε ως $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ τους μέσους χρόνους έως την πρώτη επίσκεψη της 4 ξεκινώντας από την κατάσταση 1, 2, 3, 4 αντίστοιχα. Επομένως $E[T] = \mu_1$ και επικεντρονώμαστε σε μια παραπλήσια μαρκοβιανή αλυσίδα όπου η κατάσταση 4 είναι μια κατάσταση απορροφήσεως (βλέπε σχήμα 4). Το σετ των γραμμικών εξισώσεων είναι (σελ 82 των σημειώσεων):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + 0.7\mu_1 + 0.3\mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + 0.4\mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + 0.6\mu_1 + 0.4\mu_2 \\ \mu_4 &= 0 \end{aligned}$$



Σχήμα 4: Το Μαρκοβιανό μοντέλου της άσκησης 3, ερώτημα (στ).



Σχήμα 5: Το Μαρκοβιανό μοντέλου της άσκησης 3, ερώτημα (ζ).

με

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 7 \\ \mu_2 &= \frac{11}{3} \\ \mu_3 &= \frac{20}{3} \\ \mu_4 &= 0 \end{aligned}$$

(ζ) Τρεις συνεχόμενες ήττες δύνανται να προκύψουν μόνο όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $4(LL)$. Δημιουργούμε μια πέμπτη κατάσταση $5(LLL)$, οπότε προκύπτει η μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος 5 και ο πίνακας πιθανότητας μετάβασης:

$$P = [p_{ij}]_{5x5} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E[N]$ είναι ο μέσος χρόνος απορροφήσεως του συστήματος από την κατάσταση 5 ξεκινώντας απο την 1. Ανάλογα:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + 0.7\mu_1 + 0.3\mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + 0.4\mu_3 + 0.6\mu_4 \\ \mu_3 &= 1 + 0.6\mu_1 + 0.4\mu_2 \\ \mu_4 &= 1 + 0.3\mu_3 \\ \mu_5 &= 0 \end{aligned}$$