

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
23 Μαΐου 2007 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1 - 50 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Το μήκος σε μέτρα ενός σωλήνα είναι μία εκθετική τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με παράμετρο $\lambda = 2$.

(α) Έστω ότι παίρνουμε 400 τέτοιους σωλήνες. Για ποια τιμή w το συνολικό μήκος των 400 σωλήνων θα είναι μεγαλύτερο από w με πιθανότητα ίση με 0.841; Θεωρείστε ότι τα μήκη των σωλήνων είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(β) Υπολογίστε τον αριθμό n των σωλήνων που απαιτούνται ώστε με πιθανότητα ίση με 0.841 το συνολικό μήκος να είναι μεγαλύτερο από 200 μέτρα.

Για την αθροιστική συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής ισχύει ότι $\Phi(1) = 0.841$.

Θέμα 2 - 50 μονάδες: Poisson Αφίξεις.

Τα χρονικά διαστήματα (μετρημένα σε λεπτά της ώρας) μεταξύ των αφίξεων αυτοκινήτων σε ένα σταθμό ελέγχου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικές τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 2$. Οι χρόνοι των διαδοχικών αφίξεων καταχωρούνται σε μικρές κάρτες, όπου κάθε κάρτα έχει χώρο για τρεις καταχωρήσεις. Όταν γεμίζει μία κάρτα, αντικαθίσταται από άλλη.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων;

(β) Δεδομένου ότι κανένα αυτοκίνητο δεν έφτασε τα τελευταία 4 λεπτά, ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού K των αυτοκινήτων που θα φτάσουν τα επόμενα 6 λεπτά;

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή, και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού χρόνου που απαιτείται για να γεμίσουν οι πρώτες 12 κάρτες καταχώρησης.

(δ) Θεωρείστε τα ακόλουθα δύο πειράματα.

- Διαλέγετε τυχαία μία κάρτα από μία στοίβα από συμπληρωμένες κάρτες και σημειώνετε το συνολικό χρόνο, Y , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[Y]$ και $var(Y)$.
- Φτάνετε στο σταθμό ελέγχου μία τυχαία χρονική στιγμή. Όταν η κάρτα που χρησιμοποιείται τη στιγμή της άφιξής σας γεμίσει, σημειώνετε το συνολικό χρόνο, W , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[W]$ και $var(W)$.

Βοήθεια: Στο υποερώτημα (δ), σκεφτείτε το παράδοξο της τυχαίας εμφάνισης.