Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ317 – Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Λύσεις Θεμάτων Προόδου
Διδάσκων: Παναγιώτης Τσακαλίδης
23 Μαίου 2007 - Διάρκεια 2 ώρες

Θέμα 1 - Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Η τ.μ. X έχει εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$. Συνεπώς

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2},$$

και

$$var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$$

(α) Τα μήκη $X_1, X_2, \cdots, X_{400}$ των σωλήνων είναι ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες τ.μ. με $E[X_i] = \frac{1}{2}$ και $var(X_i) = \frac{1}{4}, i = 1, 2, \cdots, 400$. Το συνολικό μήκος εκφράζεται ως

$$S_{400} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{400}$$

Ισχύει ότι

$$E[S_{400}] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_{400}] = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$$

και

$$var(S_{400}) = var(X_1 + X_2 + \cdots + X_{400}) = 400 \cdot \frac{1}{4} = 100$$

Ζητούμε να ισχύει ότι: $P(S_{400} > w) = 0.841$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, η τ.μ. S_{400} μπορεί να προσεγγιστεί από μια κανονική κατανομή $N(200, 100)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P(S_{400} > w) &= P\left(\frac{S_{400} - 200}{10} > \frac{w - 200}{10}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{w - 200}{10}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{200 - w}{10}\right) \end{aligned}$$

Μας δίνεται ότι $\Phi(1) = 0.841$ συνεπώς:

$$\Phi\left(\frac{200 - w}{10}\right) = 0.841 \Rightarrow \frac{200 - w}{10} = 1 \Rightarrow w = 190 \text{ μέτρα}$$

(β) Μας ζητείται να υπολογίσουμε το n ώστε $P(S_n > 200) = 0.841$, όπου $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Όπως στο (α), $E[S_n] = \frac{n}{2}$ και $var(S_n) = \frac{n}{4}$. Για αρκούντως μεγάλο $n, S_n \sim N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$. Συνεπώς θέλουμε:

$$\begin{aligned} P(\delta_n > 200) &= P\left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} > \frac{200 - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{200 - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - 200}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \\ &= 0.841 \end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{n}{2}-200}{\sqrt{\frac{n}{4}}} &= 1\\ \left(\frac{n}{2}-200\right)^2 &= \frac{n}{4}\end{aligned}$$

όπου n ακέραιος > 400. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{4}+200^2-200n-\frac{n}{4} &= 0\\ n^2-801n+4\cdot 200^2 &= 0\\ n &= \left\lceil\frac{801+\sqrt{801^2-4\cdot 4\cdot 200^2}}{2}\right\rceil\\ n &= 421.\end{aligned}$$

Θέμα 2 - Poisson Αφίξεις

(α) Το χρονικό διάστημα T μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$. Συνεπώς :

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ λεπτά.}$$

(β) Προφανώς, πρόκειται για αφίξεις κατά Poisson με ρυθμό λ. Λόγω της έλλειψης μνήμης της σ.δ. Poisson κατανομή με παράμετρο λ.σ. $= 12$:

$$P_K(k) = \frac{12^k e^{-12}}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

(γ) Οι πρώτες 12 κάρτες γεμίζουν με την 36η άφιξη αυτοκινήτου. Έστω D ο συνολικός χρόνος που απαιτείται. Τότε $D = T_1 = T_2 + \cdots + T_{36}$, όπου T_i ανεξάρτητες, εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με $\lambda = 2$. Συνεπώς η D ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 36:

$$\begin{aligned}f_D(t) &= \frac{2^{36}t^{35}e^{-2t}}{35!}, t \geq 0\\ E(D) &= 36E[T] = 18\\ M_D(s) &= M_{T_1}(s)\cdots M_{T_{36}}(s) = \left(\frac{2}{2-s}\right)^{36}\end{aligned}$$

(δ) **(i)** Στην πρώτη περίπτωση προφανώς $Y = T_1 + T_2 + T_3$ και η Y είναι τ.μ. Erlang 3ης τάξης με $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}E[Y] &= \frac{3}{\lambda} = 1.5\\ var(Y) &= \frac{3}{\lambda^2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(ii) Σε αυτήν την περίπτωση , $W = T_1 + T_2 + L$, όπου L είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ αφίξεων που περιέχουν την χρονική στιγμή που φτάσαμε στο σταθμό ελέγχου. Σύμφωνα με όσα είπαμε όταν μελετούσαμε το παράδοξο της τυχαίας άφιξης, L : Erlang 2ης τάξης με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς η W είναι Erlang 4ης τάξης:

$$\begin{aligned}E[W] &= \frac{4}{\lambda} = 2\\ var(W) &= \frac{4}{\lambda^2} = 1\end{aligned}$$