ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/02/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 02/03/2009

Άσκηση 1 - Ροπογεννήτριες συναρτήσεις. Έστω $X_i, 0 \leq i < \infty$, ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Ορίζουμε την νέα τ.μ. Y ως

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} X_k r^k,$$

όπου $|r| < 1$.

(α) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y, $M_Y(s) = E[e^{sY}]$.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Y.

Άσκηση 2 - Ροπογεννήτριες συναρτήσεις. Έστω η Γκαουσιανή τ.μ. X με $X \sim N(0, \sigma^2)$ και έστω U μία Bernoulli τ.μ. με $U \sim \text{Bernoulli}(\epsilon)$, ανεξάρτητη της X. Ορίζουμε την τ.μ. V ως $V = XU$.

(α) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. V, $M_V(s) = E[e^{sV}]$.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. V.

Άσκηση 3 - Σύγκλιση τ.μ. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων (iid) συνεχών τ.μ. με $E[X] = 2$ και $\text{var}(X) = 9$. Ορίζουμε τις τ.μ. $Y_i = (0.5)^i X_i,\ i = 1, 2, \ldots$. Επίσης, ορίζουμε T_n και A_n ως το άθροισμα και το μέσο όρο, αντίστοιχα, των $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

(α) Συγκλίνει η τ.μ. Y_n ως προς την πιθανότητα; Αν ναι, σε ποια τιμή;
(β) Συγκλίνει η τ.μ. T_n ως προς την πιθανότητα; Αν ναι, σε ποια τιμή;
(γ) Συγκλίνει η τ.μ. A_n ως προς την πιθανότητα; Αν ναι, σε ποια τιμή;

Άσκηση 4 - Ανισότητες, Κεντρικό οριακό θεώρημα. Γνωρίζουμε ότι η τυπική απόκλιση της τ.μ. X είναι ίση με 3.0. Για να εκτιμήσουμε τη στατιστική μέση τιμή, $E[X]$, της τ.μ. X, χρησιμοποιούμε ως εκτιμήτρια την τ.μ. A_n, τον αριθμητικό μέσο όρο n ανεξάρτητων πειραματικών τιμών της X. Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή του πλήθους n που ικανοποιεί:

$$P(|A_n - E[X]| > 0.02) < 0.318.$$

(α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.
(β) Χρησιμοποιώντας προσέγγιση με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα.
(γ) Ποιες από τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις δίνει το μικρότερο n;

Άσκηση 5 - Moivre-Laplace προσέγγιση της διωνυμικής. Οι αεροπορικές εταιρίες μπάντα προσπαθούν να πουλήσουν όσο το δυνατό περισσότερα εισιτήρια για κάθε πτήση στο πρόγραμμα τους και συγχρόνως προσπαθούν να αποφύγουν το λεγόμενο "*overbooking*", δηλαδή να έχουν υπεράριθμους επιβάτες στην πτήση. Αν κατά μέσο όρο 10% των επιβατών μιας πτήσης ακυρώνουν το εισιτήριό τους, ανεξάρτητα μεταξύ τους, ποια είναι η πιθανότητα ότι μια συγκεκριμένη πτήση με μέγιστη χωρητικότητα 300 επιβατών θα είναι "overbooked" αν η εταιρία έχει πουλήσει 320 εισιτήρια;

Άσκηση 6 - Κεντρικό οριακό θεώρημα. Το μήκος σε μέτρα ενός τμήματος μίας σωλήνας είναι εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 2$.

(α) Έστω ότι λαμβάνουμε 400 τέτοια τμήματα σωλήνων. Υπολογίστε ένα όριο w, έτσι ώστε το συνολικό μήκος των 400 τμημάτων να είναι μεγαλύτερο από w με πιθανότητα 0.841.
(β) Υπολογίστε το πλήθος n των τμημάτων που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα να κατασκευάσουμε μία σωλήνα συνολικού μήκους τουλάχιστον 200 μέτρων να είναι 0.841.

Άσκηση 7 - Σήμα από πολλαπλές κεραίες. Έστω $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ iid τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 που αναπαριστούν τα πλάτη των σημάτων που λαμβάνονται από ένα δέκτη με πολλαπλές κεραίες. Έστω $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ iid τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, ανεξάρτητες των Z_i's, που αναπαριστούν τις φάσεις των λαμβανομένων σημάτων. Ο δέκτης δημιουργεί το γραμμικό συνδιασμό

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Z_j \sin \Theta_j .$$

Υπολογίστε την κατανομή της τ.μ. X_n καθώς $n \to \infty$.