ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:
Στοχαστικές Διαδικασίες Αφίξεων Bernoulli και Poisson.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/03/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 30/03/2009

Άσκηση 1. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού αριθμού των δοκιμών από την αρχή μιας στοχαστικής διαδικασίας Bernoulli (με παράμετρο p) έως και την n-στη επιτυχία *μετά* την m-στη αποτυχία.

Άσκηση 2. Με βάση την κατανόησή σας για τη στοχαστική διαδικασία Poisson, καθορίστε τις αριθμητικές τιμές a και b στην ακόλουθη ισότητα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\int_t^\infty \frac{\lambda^{11}\tau^{10}e^{-\lambda\tau}}{10!}d\tau = \sum_{k=a}^{b} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Άσκηση 3. Πλοία ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα μέσα σε ένα ποτάμι. Πλοία περνούν από ένα σημείο Α με κατεύθυνση προς τα ανατολικά σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό λ_E πλοία τη μέρα. Πλοία περνούν από το ίδιο σημείο με κατεύθυνση προς τα δυτικά σύμφωνα με μία ανεξάρτητη σ.δ. Poisson με ρυθμό λ_W πλοία τη μέρα. Ένας δείκτης δηλώνει πάντα την κατεύθυνση του τελευταίου πλοίου που πέρασε από το σημείο Α.

(α) Δεδομένου του γεγονότος ότι ο δείκτης δείχνει δυτικά:

(i) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το επόμενο πλοίο που θα περάσει θα έχει κατεύθυνση προς τα δυτικά;
(ii) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το επόμενο πλοίο που θα περάσει θα έχει κατεύθυνση προς τα ανατολικά;
(iii) Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του χρονικού διαστήματος έως την επόμενη αλλαγή της κατεύθυνσης του δείκτη;

(β) Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις, υποθέστε ότι αρχίζετε να παρατηρείτε την κίνηση στο ποτάμι κάποια τυχαία στιγμή.

(i) Έστω W ο χρόνος παρατήρησης μέχρι την άφιξη του 8ου πλοίου με κατεύθυνση προς τα ανατολικά. Υπολογίστε τη σ.π.π. της τ.μ. W.
(ii) Έστω Y ο χρόνος παρατήρησης μέχρι την άφιξη του 8ου πλοίου συνολικά (με κατεύθυνση προς τα ανατολικά ή προς τα δυτικά). Υπολογίστε τη σ.π.π. της τ.μ. Y.

Άσκηση 4. Ο Κώστας και η Μαρία δουλεύουν στο ταμείο ενός μικρού super market, το οποίο είναι ανοικτό από τις 8πμ έως τις 9μμ. Το μαγαζί έχει μόνο ένα ταμείο. Ο Κώστας δουλεύει κατά την πρωινή βάρδια, από τις 8πμ έως τις 2μμ, ενώ η Μαρία δουλεύει κατά την απογευματινή βάρδια, από τις 2μμ έως τις 9μμ. Πελάτες καταφθάνουν στο ταμείο σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό 20 αφίξεις την ώρα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη από τη στιγμή που φτάνει στο ταμείο μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος.

Μία συγκεκριμένη μέρα μας δίδεται η πληροφορία ότι ο Κώστας και η Μαρία εξυπηρέτησαν συνολικά k πελάτες. Δεδομένου αυτού του γεγονότος, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Κώστας εξυπηρέτησε ακριβώς j πελάτες. Μην ξεχάσετε να καθορίσετε σαφώς τα εύρη τιμών στην απάντησή σας. Αναγνωρίζετε την πιθανότητα που υπολογίσατε;

Άσκηση 5. Ένας αστυνομικός οδηγά από διασταύρωση σε διασταύρωση σε χρόνο X ο οποίος είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο λ. Σε κάθε διασταύρωση παρατηρεί και αναφέρει ένα ατύχημα με πιθανότητα p. (Η αναφορά του αστυνομικού δεν επηρεάζει την οδήγησή του). Ανεξάρτητα από τα ανωτέρω, ο αστυνομικός λαμβάνει ραδιομηνύματα (αμελητέας διάρκειας) από το κέντρο σύμφωνα με μία σ.δ. Poisson με ρυθμό μ μηνύματα την ώρα.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητα (σ.π.) της τ.μ. N, του αριθμού των διασταυρώσεων που επισκέπτεται ο αστυνομικός μέχρι να αναφέρει ένα ατύχημα για πρώτη φορά.

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. Q, του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών αναφορών ατυχήματος από τον αστυνομικό.

(γ) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. M, του αριθμού των ατυχημάτων που ο αστυνομικός αναφέρει σε διάστημα δύο ωρών.

(δ) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. K, του αριθμού των ατυχημάτων που ο αστυνομικός αναφέρει σε διάστημα μεταξύ της λήψης δύο διαδοχικών ραδιομηνυμάτων από το κέντρο.

(ε) Παρατηρούμε τον αστυνομικό κάποια τυχαία στιγμή πολύ μετά την αρχή της βάρδιας του. Έστω W ο συνολικός χρόνος από τη λήψη του προηγούμενου ραδιομηνύματος μέχρι τη λήψη του επόμενου. Ποια είναι η σ.π.π. της τ.μ. W; Ποια είναι η ροπογεννήτρια της W;

(στ) Και πάλι παρατηρούμε τον αστυνομικό κάποια τυχαία στιγμή. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. V, του χρόνου που μεσολαβεί από τη στιγμή που αρχίσαμε να παρατηρούμε μέχρις ότου ο αστυνομικός λάβει ένα ραδιομήνυμα *μετά* την επόμενη αναφορά ατυχήματος.

Άσκηση 6. Θεωρείστε μία σ.δ. Poisson με παράμετρο λ και έστω N ο αριθμός των αφίξεων σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα T. Με την i-στή άφιξη συσχετίζουμε τη μη-αρνητική τ.μ. Y_i, και υποθέτουμε ότι όλες οι Y_i για $i = 1, 2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες με κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $F_Y(y)$. Για παράδειγμα, οι Poisson αφίξεις μπορεί να αντιστοιχούν σε περιστατικά υπερφόρτισης τάσης του ρεύματος που τροφοδοτεί έναν ΗΥ, και οι σχετιζόμενες τ.μ. Y_i να αντιπροσωπεύουν τις τιμές της τάσης. Μας ενδιαφέρει να χαρακτηρίσουμε τα μεγέθη:

$$V_N = \min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}, \quad W_N = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}.$$

(α) Υπολογίστε την α.σ.κ. των τ.μ. V_N και W_N.

Βοήθεια: Υπάρχουν δύο τρόποι να προχωρήσετε στο (α). Ο "κλασσικός" είναι να υπολογίσετε πρώτα την δεσμευμένη α.σ.κ. των τ.μ. V_N και W_N *για κάποια συγκεκριμένη τιμή της τ.μ.* $N = n$ και κατόπιν να εφαρμόσετε το ΘΟΠ για να υπολογίσετε την α.σ.κ. των V_N και W_N. Ο εναλλακτικός και πιο γρήγορος τρόπος είναι ο εξής: Για κάποια τιμή $z \geq 0$, έστω N_1 ο αριθμός των αφίξεων των οποίων οι σχετικές τ.μ. Y_i ικανοποιούν τη σχέση $Y_i \leq z$ και έστω N_2 ο αριθμός των αφίξεων των οποίων οι σχετικές τ.μ. Y_i ικανοποιούν τη σχέση $Y_i > z$. Τι μπορείτε να πείτε για τις κατανομές των τ.μ. N_1 και N_2; Τώρα παρατηρείστε ότι $P(V_N \leq z) = P(N = 0) + P(N_1 \geq 1)$ και ότι $P(W_N \leq z) = P(N_2 = 0)$.

(β) Στο παράδειγμα του συστήματος τροφοδοσίας τάσης, υποθέστε ότι η σ.δ. Poisson έχει ρυθμό αφίξεων 4 υπερφορτίσεις ανά ώρα και ότι οι τιμές της τάσης, Y_i, είναι εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο $a = 0.01$ volt^{-1}. Ποια είναι η πιθανότητα ότι σε μία περίοδο 8 ωρών οι υπερφορτίσεις δεν θα υπερβούν σε τιμή τα 300 volt; τα 500 volt; τα 750 volt;