ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 18/03/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 30/03/2009

Άσκηση 1.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) $W_{m,n}$ ως τον αριθμό των δοκιμών από την αρχή της στοχαστικής διαδικασίας (Σ.Δ.) Bernoulli μέχρι και (συμπεριλαμβανομένης και αυτής) την n-οστής επιτυχίας μετά την m-οστή αποτυχία. Η τ.μ. $W_{m,n}$ μπορεί να οριστεί σε σχέση με δύο άλλες τ.μ. ως εξής: $W_{m,n} = X_m + Y_n$, όπου:
X_m=ο αριθμός των δοκιμών μιας Σ.Δ. Bernoulli μέχρι και την m-οστή αποτυχία
Y_n=ο αριθμός των δοκιμών μιας Σ.Δ. Bernoulli μέχρι και την n-οστή επιτυχία
Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της Σ.Δ. Bernoulli, οι τ.μ. X_m και Y_n είναι ανεξάρτητες αφού ορίζονται πάνω σε διαφορετικές δοκιμές της Σ.Δ. Η συνάρτηση πυκνότητας μάζας (PMF) για την τ.μ. Y_n είναι Pascal n-οστής τάξης με παράμετρο p, άρα με μέση τιμή np^{-1} και διασπορά $n(1-p)p^{-2}$. Η PMF για την τ.μ. X_m είναι Pascal m-οστής τάξης με παράμετρο $q = 1-p$. Επομένως,

$$E\{W_{m,n}\} = E\{X_m\} + E\{Y_n\} = \frac{m}{1-p} + \frac{n}{p}.$$

Επίσης, εκμεταλλευόμενοι την ανεξαρτησία των τ.μ., η διασπορά είναι η εξής:

$$var\{W_{m,n}\} = var\{X_m\} + var\{Y_n\} = \frac{mp}{(1-p)^2} + \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Άσκηση 2.

Παρατηρούμε ότι το όρισμα του ολοκληρώματος ($\lambda^{11}\tau^{10}e^{-\lambda\tau}/10!$) είναι κατανομή Erlang τάξης 10. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int_t^\infty \lambda^{11}\tau^{10}e^{-\lambda\tau}/10!\, d\tau$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα ότι ο χρόνος της 11ης άφιξης είναι μεγαλύτερος από t. Η πιθανότητα αυτού του γεγονότος είναι ισοδύναμη με την πιθανότητα του γεγονότος ότι ο αριθμός των αφίξεων μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι μικρότερη ή ίση του 10. Για να υπολογίσουμε αυτή την πιθανότητα, αθροίζουμε τις πιθανότητες των (αμοιβαίως αποκλειόμενων) γεγονότων ότι ακριβώς k αφίξεις έιναι στο διάστημα $[0, t]$, όπου $k = 0, 1, ..., 10$. Επειδή το κάθε γεγονός είναι αμοιβαίως αποκλειόμενο, όταν αθροίζουμε από $\alpha = 0$ έως $b = 10$, το αριστερό μέλος της σχέσης είναι η πιθανότητα ότι υπήρχαν 10 ή λιγότερες αφίξεις στο διάστημα $[0, t]$. Άρα, ισχύει ότι $\alpha = 0$ και $b = 10$.

Άσκηση 3.

(α) Δεδομένου του γεγονότος ότι το τελευταίο πλοίο που πέρασε είχε κατεύθυνση προς τα δυτικά:

(I) Τα πλοία που έχουν κατεύθυνση προς τα δυτικά και τα πλοία που έχουν κατεύθυνση προς τα ανατολικά είναι ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες (Σ.Δ.) Poisson με ρυθμούς λ_W και λ_E, αντίστοιχα. Θεωρούμε τη συγχωνευμένη Σ.Δ. (merged process) η οποία έχει ρυθμό $\lambda_W + \lambda_E$. Η προηγούμενη άφιξη που πρόερχεται από τη Σ.Δ. (που έχει κατεύθυνση) προς τα δυτικά δεν σχετίζεται με το αν η τωρινή άφιξη προέρχεται απο τη Σ.Δ. (που έχει κατεύθυνση) προς τα δυτικά ή προς τα ανατολικά. Επομένως, η πιθανότητα ότι το επόμενο πλοίο που θα περάσει θα έχει κατεύθυνση προς τα δυτικά ισούται με την εύρεση της πιθανότητας της άφιξης που προέρχεται από τη Σ.Δ. (που έχει κατεύθυνση) προς τα δυτικά, η οποία ισούται απλά με τον λόγο του ρυθμού της Σ.Δ. (που έχει κατεύθυνση) προς τα δυτικά προς το λόγο της συγχωνευμένης Σ.Δ.:

$$P(\text{το επόμενο πλοίο που θα περάσει θα έχει κατεύθυνση προς τα δυτικά}) = \frac{\lambda_W}{\lambda_W + \lambda_E}$$

(II) Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζουμε την πιθανότητα ότι η άφιξη πλοίου με κατεύθυνση προς τα ανατολικά προκύπτει πριν από την άφιξη πλοίου με κατεύθυνση προς τα δυτικά, δηλαδή:

$$P(\text{το επόμενο πλοίο που θα περάσει θα έχει κατεύθυνση προς τα ανατολικά}) = \frac{\lambda_E}{\lambda_W + \lambda_E}$$

(III) Ο δείκτης θα αλλάξει κατεύθυνση στην επόμενη άφιξη ενός πλοίου που θα έχει κατεύθυνση προς τα ανατολικά. Από τον ορισμό της Σ.Δ. Poisson ο χρόνος που απομένει μέχρι αυτή την άφιξη (ο οποίος έστω ότι συμβολίζεται ως X) ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_E:

$$f_X(x) = \lambda_E e^{-\lambda_E x}, \ x \geq 0$$

(β) Υποθέτουμε ότι αρχίζουμε να παρατηρούμε την κίνηση στο ποτάμι κάποια τυχαία στιγμή:

(I) Έστω ότι X είναι ο (πρώτης τάξης) χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων για τα πλοία που κινούνται προς τα ανατολικά, ο οποίος εκφράζει το χρονικό διάστημα ανάμεσα στο χρονικό σημείο παρατήρησης ως την πρώτη άφιξη ενός πλοίου που έχει κατεύθυνση προς τα ανατολικά. Χρησιμοποιώντας αυτή την τ.μ. μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα $W = X_1 + X_2 + ... + X_8$, όπου X_1 είναι ο χρόνος ανάμεσα στη χρονική στιγμή που παρατηρούμε το ποτάμι για πρώτη φορά και την πρώτη άφιξη (η οποία θα είναι εκθετική με παράμετρο λ_E, εξαιτίας της ιδιότητας απώλειας μνήμης που έχει η εκθετική κατανομή), X_2 είναι ο χρόνος ανάμεσα στην πρώτη και τη δεύτερη άφιξη, κ.ο.κ. Εξ ορισμού, η PDF της τ.μ. W είναι ισοδύναμη με την κατανομή Erlang 8ης τάξης:

$$f_W(w) = \frac{\lambda_E^8 w^7 e^{-\lambda_E w}}{7!}, \ w \geq 0$$

(II) Η διαφορά αυτού του ερωτήματος σε σχέση με το προηγούμενο είναι ότι τώρα *κάθε* πλοίο που διασχίζει το ποτάμι μας ενδιαφέρει σαν γεγονός και όχι μόνο τα πλοία που κατευθύνονται ανατολικά. Η PDF της Y είναι επίσης μία κατανομή Erlang με διαφορετική παράμετρο για το λ:

$$f_Y(y) = \frac{(\lambda_W + \lambda_E)^8 y^7 e^{-(\lambda_W+\lambda_E)y}}{7!}, \ y \geq 0$$

Άσκηση 4.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P(\text{ο Κώστας εξυπηρέτησε } j \text{ πελάτες} | \text{ο Κώστας και η Μαρία εξυπηρέτησαν } k \text{ πελάτες})$$

Ορίζουμε τα ακόλουθα γεγονότα:
A: ακριβώς j πελάτες καταφθάνουν τις πρώτες 6 ώρες (κατά τη βάρδια του Κώστα)
B: ακριβώς $k - j$ πελάτες καταφθάνουν τις τελευταίες 7 ώρες (βάρδια Μαρίας)
C: ακριβώς k πελάτες καταφθάνουν κατά τη συνολική διάρκεια (των 13 ωρών) που είναι ανοιχτό το super market
Τα γεγονότα A, B και C μπορούν εκφραστούν μέσω τ.μ. Poisson με παράμετρο $\lambda = 20$.
Είναι επίσης σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι $P(A \cap C) = P(A \cap B)$. Ο αριθμός των αφίξεων πελατών, σε διαστήματα που είναι ξένα μεταξύ τους, είναι ανεξάρτητος ο ένας από

τον άλλο. Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα. Οπότε, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(A\cap B)}{P(C)} = \frac{P(A)P(B)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^j 6^j}{j!}e^{-6\lambda}\frac{\lambda^{k-j}7^{k-j}}{(k-j)!}e^{-7\lambda}}{\frac{\lambda^k 13^k}{k!}e^{-13\lambda}} = \frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{6^j 7^{k-j}}{13^k} = \frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{6^j 7^{k-j}}{13^j 13^{k-j}} \\ &= \binom{k}{j}\Big(\frac{6}{13}\Big)^j\Big(\frac{7}{13}\Big)^{k-j}, \quad 0\le j\le k \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η τελική απάντηση έχει την μορφή μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής.

Άσκηση 5.

(α) Εφόσον ψάχνουμε να βρούμε τον αριθμό των ‘‘δοκιμών’’ εως και (συμπεριλαμβανομένου και) της πρώτης ‘‘επιτυχίας’’, η τ.μ. N είναι γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο p:

$$p_N(n) = (1-p)^{n-1}p\,, \quad n\ge 1$$

(β) Ο χρόνος που απαιτείται για να οδηγήσει ο αστυνομικός από διασταύρωση σε διασταύρωση είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο λ. Αφού η πιθανότητα ο αστυνομικός να παρατηρήσει και να αναφέρει ένα ατύχημα (σε κάθε διασταύρωση) είναι ίση με p, η κατανομή του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών αναφορών ατυχήματος από τον αστυνομικό είναι εκθετική με παράμετρο $p\lambda$ (σκεφτείτε το ως διαχωρισμό (splitting) μιας Poisson). Άρα,

$$f_Q(q) = (p\lambda)e^{-qp\lambda}\,, \quad q\ge 0$$

(γ) Εφόσον ο χρόνος μεταξύ των ατυχημάτων είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο $p\lambda$, ο αριθμός των ατυχημάτων σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα τ είναι μία Poisson τ.μ. με παράμετρο $p\lambda\tau$. Άρα,

$$P(m \text{ αναφορές ατυχημάτων σε διάστημα δύο ωρών}) = p_M(m) = \frac{e^{-2p\lambda}(2p\lambda)^m}{m!}\,, \quad m\ge 0$$

(δ) Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό των ραδιομηνυμάτων προς τον αστυνομικό και τις αναφορές που κάνει ο αστυνομικός ως ανεξάρτητες Σ.Δ. Poisson με ρυθμούς αφίξεων μ και $p\lambda$, αντίστοιχα. Όταν οι δύο Σ.Δ. Poisson είναι συνδεδεμένες (joined), η Σ.Δ. που προκύπτει είναι μια Σ.Δ. Poisson με ρυθμό άφιξης $\mu+p\lambda$. Επιπλέον η πιθανότητα της λήψης ραδιομηνύματος είναι $\frac{\mu}{\mu+p\lambda}$. Επειδή ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του αριθμού των ατυχημάτων που ο αστυνομικός αναφέρει σε διάστημα μεταξύ της λήψης δύο διαδοχικών ραδιομηνυμάτων από το κέντρο, παρατηρούμε ότι αυτή είναι μία shifted Γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο $\frac{\mu}{\mu+p\lambda}$. Άρα,

$$p_K(k) = \Big(\frac{p\lambda}{\mu+p\lambda}\Big)^k\Big(\frac{\mu}{\mu+p\lambda}\Big)\,, \quad k\ge 0$$

(ε) I. Εάν ξεκινήσουμε να παρατηρούμε τα ραδιομηνύματα του αστυνομικού σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή, εξαιτίας της ιδιότητας απώλειας μνήμης μεταξύ των αφίξεων μιας Σ.Δ. Poisson, η κατανομή του χρόνου μέχρι να λάβει το επόμενο ραδιομήνυμα θα είναι εκθετική με παράμετρο μ. Επίσης, ο χρόνος ανάμεσα στην προηγούμενο ραδιομήνυμα και τη χρονική στιγμή στην οποία ξεκινάμε να παρατηρούμε τον αστυνομικό είναι επίσης εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Επομένως, $W = X_1 + X_2$, όπου X_1 και X_2 έχουν εκθετικές κατανομές, δηλαδή η W είναι μία δεύτερης τάξης Erlang PDF

$$f_W(w) = \mu^2 w e^{-w\mu}\,, \quad w\ge 0$$

II. Αφού οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, η ροπογεννήτρια της W ισούται με το γινόμενο των ροπογγενητριών των X_1 και X_2, όπου η κάθε μία έχει ροπογγενήτρια $M_X(s) = \frac{\mu}{\mu - s}$. Άρα, $M_W(s) = (\frac{\mu}{\mu - s})^2$.

(στ) Ο χρόνος V, του οποίου τη ροπογγενήτρια θέλουμε να βρούμε, είναι ο χρόνος ανάμεσα στη χρονική στιγμή που παρατηρούμε τον αστυνομικό και της επόμενης αναφοράς ατυχήματος, σύν το χρόνο ανάμεσα στην επόμενη αναφορά ατυχήματος και του επόμενου ραδιομηνύματος που λαμβάνει. Αυτοί οι δύο χρόνοι είναι ανεξάρτητοι ο ένας με τον άλλο. Εάν ορίσουμε τον πρώτο χρόνο ως Y και το δεύτερο ως Z, παρατηρούμε ότι εξαιτίας της ιδιότητας απώλειας μνήμης, η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο λp και η τ.μ. Z είναι εκθετική με παράμετρο μ. Άρα,

$$M_V(s) = M_Y(s)M_Z(s) = (\frac{\lambda p}{\lambda p - s})(\frac{\mu}{\mu - s})$$

Άσκηση 6.

(α) Οι αφίξεις των οποίων οι τ.μ. ικανοποιούν τη σχέση $Y_i \leq z$ μπορούν να θεωρηθούν ως αποτέλεσμα διαχωρισμού της αρχικής Poisson διαδικασίας άφιξης. Η διαχωρισμένη διαδικασία είναι επομένως Poisson με παράμετρο $\lambda F_Y(z)$. Ομοίως, οι αφίξεις των οποίων οι τ.μ. ικανοποιούν τη σχέση $Y_i > z$, αποτελούν μία διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda(1 - F_Y(z))$. Άρα, για ένα δεδομένο $z \geq 0$ και θεωρώντας ότι το N δηλώνει τον αριθμό των αφίξεων στο διάστημα T (και επίσης, θεωρώντας ότι $V_0 = 0$), έχουμε ότι:

$$P(V_N \leq z) = P(N = 0) + P(N_1 \geq 1) = e^{-\lambda T} + 1 - e^{-\lambda F_Y(z)T}$$

και

$$P(W_N \leq z) = P(N_2 = 0) = e^{-\lambda(1-F_Y(z))T}.$$

Μια εναλλακτική προσέγγιση θα ήταν πρώτα να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου υπολογίζουμε το ελάχιστο ή το μέγιστο ενός ντετερμινιστικού αριθμού τ.μ.:

$$V_n = \min(Y_1, ..., Y_n) \text{ and } W_n = \max(Y_1, ..., Y_n).$$

Η CDF της τ.μ. V_n, όπου $n \geq 1$ είναι:

$$\begin{aligned} F_{V_n}(v) &= P(V_n \leq v) = P(\min(Y_1, ..., Y_n) \leq v) = 1 - P(\min(Y_1, ..., Y_n) > v) \\ &= 1 - P(Y_1 > v)P(Y_2 > v) \cdot ... \cdot P(Y_n > v) = 1 - [P(Y_i > v)]^n, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οι τ.μ. Y_i είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες. Από τη σχέση $P(Y_i > v) = 1 - F_{Y_i}(v)$ έχουμε ότι

$$F_{V_n}(v) = 1 - [1 - F_{Y_i}(v)]^n \text{ for } n \geq 1.$$

Αναφέρεται ότι το ελάχιστο ή το μέγιστο ενός κενού συνόλου είναι 0. Άρα, $F_{V_0}(v) = 1$. Ομοίως, η CDF της W_n είναι:

$$F_{W_n}(v) = P(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq w) = [F_{Y_i}(w)]^n\,, \text{ for } n \geq 1,$$

όπου $F_{Y_i}(v)$ είναι η CDF της Y_i και $F_{W_0}(w) = 1$. Τώρα θεωρούμε V_N και W_N, όπου N είναι μια τ.μ. η οποία ακολουθεί μια Poisson PMF με παράμετρο λ. Δεσμεύοντας πάνω σε μια συγκεκριμένη τιμή του N, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F_{V_N}(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)P(V_N \leq v | N = n) = P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)P(V_n \leq v) \\ &= e^{-\lambda T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}(1 - [1 - F_{Y_i}(v)]^n) \\ &= e^{-\lambda T} + (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} - e^{-\lambda T}) - (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda T(1 - F_{Y_i}(v))]^n}{n!} e^{-\lambda T} - e^{-\lambda T}) \\ &= e^{-\lambda T} + 1 - e^{-\lambda T} - e^{-\lambda T} \cdot e^{\lambda T(1-F_{Y_i}(v))} + e^{-\lambda T}, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Οπότε, τελικά βρίσκουμε ότι

$$F_{V_n}(v) = e^{-\lambda T} + 1 - e^{-\lambda T F_{Y_i}(v)}.$$

Ομοίως, για την $F_{W_N}(w)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{W_N}(w) &= P(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)P(W_n \leq w) = e^{-\lambda T} + (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}[F_{Y_i}(w)]^n - e^{-\lambda T}) \\ &= e^{-\lambda T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda T F_{Y_i}(w)]^n}{n!} = e^{-\lambda T} \cdot e^{\lambda T F_{Y_i}(w)} = e^{-\lambda T[1 - F_{Y_i}(w)]} \end{aligned}$$

(β) Ισχύει ότι $\lambda = 4$ υπερφορτίσεις/ώρα και $T = 8$ ώρες. Επίσης, επειδή η Y_i είναι εκθετική με παράμετρο $\alpha = 0.01$, έχουμε ότι $1 - F_Y(z) = e^{-\alpha z}$. Επομένως, $P(W_N \leq z) = e^{-32 e^{-0.01 z}}$. Για $z = 300$, 500 και 750, αντίστοιχα, η πιθανότητα που προκύπτει είναι 0.2033, 0.8060 και 0.9825.