ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων:
Αλυσίδες Markov

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/5/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 13/5/2009

Άσκηση 1. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας ρίχνουν επί μία βδομάδα ένα κέρμα A το οποίο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα 2/3. Η Μαρία είναι η διαιτητής της αναμέτρησης. Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής: Στην αρχή κάθε γύρου, η Μαρία ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα. Αν έρθει κεφαλή, τότε ο Χρήστος ρίχνει το κέρμα A. Αν έρθουν γράμματα, παίζει ο Ανδρέας. Αν το κέρμα φέρει κεφαλή, ο παίκτης που το πέταξε κερδίζει ενώ αν φέρει γράμματα κερδίζει ο άλλος παίκτης. Ο παίκτης που κερδίζει τους περισσότερους γύρους, κερδίζει τον αγώνα.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του ποσοστού των γύρων τους οποίους κερδίζει ο Χρήστος σε μία βδομάδα·

Η Μαρία παραπονιέται ότι πρέπει να παραμένει παρούσα όλη τη βδομάδα, έστω και αν δεν κερδίζει τίποτα, οπότε οι κανόνες του παιχνιδιού αλλάζουν κάπως για την επόμενη εβδομάδα: Η Μαρία ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα *μία φορά* στην αρχή της βδομάδας. Αν έρθει κεφαλή, τότε ο Χρήστος ρίχνει το κέρμα A. Αν έρθουν γράμματα, παίζει ο Ανδρέας. Αν το κέρμα A φέρει κεφαλή, ο παίκτης που το πέταξε κερδίζει ενώ αν φέρει γράμματα κερδίζει ο άλλος παίκτης. Ο παίκτης που κερδίζει το γύρο ρίχνει το κέρμα στον επόμενο γύρο.

(β) Ορίστε μια αλυσίδα Markov που περιγράφει αυτό το πείραμα και δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Ορίστε ως κατάσταση 1 το γεγονός ότι η Μαρία ρίχνει το κέρμα, κατάσταση 2 το γεγονός ότι ο Χρήστος κερδίζει το γύρο, και κατάσταση 3 το γεγονός ότι ο Ανδρέας κερδίζει το γύρο.

(γ) Βρείτε την πιθανότητα του γεγονότος: {Ο Χρήστος ρίχνει πρώτος το κέρμα, χάνει τον πρώτο γύρο, και κερδίζει τον δεύτερο γύρο}.

Άσκηση 2. Έστω X_n, $n \geq 0$, μία δυαδική στοχαστική διαδικασία που παίρνει τιμές 0 ή 1. Γνωρίζουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} p_{X_0}(1) &= 1 \\ p_{X_{n+1}/X_n}(1/1) &= \tfrac{3}{4}, \quad \text{για } n \geq 0, \\ p_{X_{n+1}/X_n}(0/0) &= \tfrac{2}{3}, \quad \text{για } n \geq 0. \end{aligned}$$

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το πρώτο 0 θα εμφανιστεί σε χρόνο k, για $k = 1, 2, 3, \ldots$.

(β) Ορίστε τις καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov που περιγράφει αυτό το πείραμα, δώστε το γράφημα της αλυσίδας, υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης και την οριακή κατανομή. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_{5000} = 1)$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_{5000} = 1 \text{και } X_{5002} = 1)$.

(δ) Δεδομένου του γεγονότος $X_{5001} = X_{5002} = X_{5003} = \cdots X_{5001+m}$, όπου $m \geq 0$, ποια είναι η πιθανότητα ότι η κοινή τιμή είναι 1; Υπολογίστε το όριο της πιθανότητας αυτής καθώς $m \to \infty$ και εξηγείστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 3. Η Λίζα είναι επί του παρόντος στην τάξη 6-1. Για κάθε μέρα που είναι στην 6-1, την επομένη μέρα θα είναι επίσης στην 6-1 με πιθανότητα 1/2. Αλλιώς, θα μεταπηδήσει σε μία από τις τάξεις 6-2, 6-3, 9, ή 15, με ίσες πιθανότητες. Για κάθε μέρα που είναι στην 6-3, την επομένη μέρα αλλάζει στην 9 με πιθανότητα 1/4, στην 6-1 με πιθανότητα 3/8 και στην 6-2 με πιθανότητα 3/8. Για κάθε μέρα που είναι στην 6-2, την επομένη μέρα αλλάζει στην 15 με πιθανότητα 1/2, στην 6-1 με πιθανότητα 3/8 και στην 6-3 με πιθανότητα 1/8. Αν αφήσει την τάξη 6 (δηλαδή τις 6-1, 6-2, ή 6-3) δεν θα ξαναεπιστρέψει σε αυτή. Αν αλλάξει στην 9, θα μείνει για πάντα σε αυτή. Τέλος, αν αλλάξει στην 15, θα μείνει για πάντα σε αυτή.

(α) Δώστε το γράφημα αυτής της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ποιες είναι οι μεταβατικές, οι έμμονες και οι καταστάσεις απορροφήσεως; Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Λίζα θα φύγει τελικά από την τάξη 6;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Λίζα θα βρεθεί τελικά στην τάξη 15;

(γ) Ποιος ο μέσος αριθμός ημερών μέχρις ότου η Λίζα εγκαταλείψει τη τάξη 6;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε τους τύπους για τις πιθανότητες απορροφήσεως και τους μέσους χρόνους απορροφήσεως.