ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/5/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 13/5/2009

Άσκηση 1.

(α) Έστω ότι η τ.μ. X_i λαμβάνει την τιμή 1 όταν ο Χρήστος κερδίζει τον $i-$οστό γύρο και έστω n το πλήθος των γύρων που παίζονται σε διάστημα μιας βδομάδας. Η πιθάνοτητα $P(X_i = 1)$ υπολογίζεται μέσω της ολικής πιθανότητας:

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Άρα, η μέση τιμή της X_i είναι:

$$E(X_i = 1) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

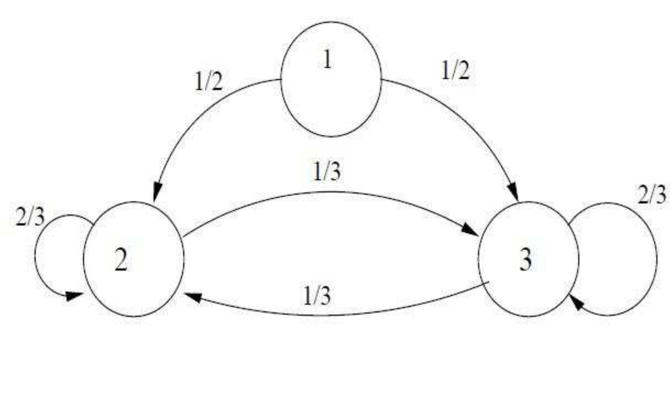
Το ποσοστό των γύρων που ο Χρήστος κερδίζει είναι:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Αφού οι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι όμοια κατανεμημένες, η μέση τιμή του ποσοστού των γύρων τους οποίους κερδίζει ο Χρήστος σε μια βδομάδα είναι:

$$E(S_n) = E(X_1) = \frac{1}{2}.$$

(β) Η αλύσιδα Markov που περιγράφει το πείραμα είναι η εξής:



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1

(γ) Έστω A η πιθανότητα του γεγονότος {Ο Χρήστος ρίχνει πρώτος το κέρμα, χάνει τον πρώτο γύρο, και κερδίζει τον δεύτερο γύρο}, τότε θα είναι:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

Άσκηση 2.

(α) Παρατηρούμε ότι η X_n αποτελεί μια αλυσίδα Markov. Το διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων φαίνεται στο σχήμα 2. Η διαδικασία πάντα ξεκινάει στην κατάσταση 1, οπότε η πιθανότητα ότι το πρώτο μηδέν προκύπτει σε χρόνο 1 είναι $\frac{1}{4}$, η πιθανότητα ότι προκύπτει σε χρόνο 2 είναι $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$ και γενικά η πιθανότητα ότι προκύπτει σε χρόνο k είναι

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4}, \ \ k = 1, 2, \ldots$$

(β) Έως την 5000^{η} επανάληψη μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διαδικασία είναι σε steady-state. Επομένως, απλά μας ενδιαφέρει η steady-state πιθανότητα του να είμαστε στην κατάσταση 1. Οι εξισώσεις καταστάσεων είναι:

$$\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_0,$$
$$\pi_1 + \pi_0 = 1.$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε ότι

$$P(X_{5000} = 1) \approx \pi_1 = \frac{4}{7}.$$

(γ) Έχουμε ότι

$$P(X_{5000} = 1, X_{5002} = 1) = P(X_{5002} = 1 | X_{5000} = 1) P(X_{5000} = 1).$$

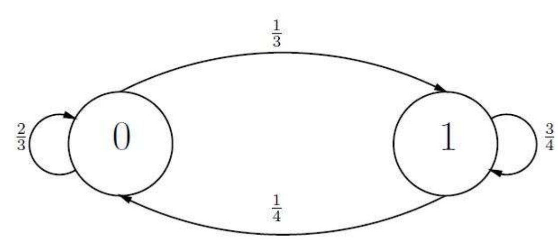
Υπάρχουν μόνο δύο πιθανά sample paths. Είτε ξεκινάμε από την κατάσταση 1 έπειτα μεταβαίνουμε στην κατάσταση 0 και επιστρέφουμε στην κατάσταση 1, ή ξεκινάμε από την κατάσταση 1 και παραμένουμε σε αυτήν για τις επόμενες δύο επαναλήψεις. Άρα, ισχύει ότι

$$P(X_{5000} = 1, X_{5002} = 1) = \frac{4}{7}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{31}{84} = 0.369.$$

(δ) Έστω ότι το γεγονός A αντιστοιχεί στο ότι η κοινή τιμή είναι 1. Επομένως, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P(A | X_{5001} = \ldots = X_{5001+m}) \\
= \ & \frac{P(X_{5001} = \ldots = X_{5001+m} | A) P(A)}{P(X_{5001} = \ldots = X_{5001+m} | A) P(A) + P(X_{5001} = \ldots = X_{5001+m} | A^c) P(A^c)} \\
= \ & \frac{P(X_{5001} = \ldots = X_{5001+m} | X_{5001} = 1) P(X_{5001} = 1)}{\sum_{i=0}^{1} P(X_{5001} = \ldots = X_{5001+m} | X_{5001} = i) P(X_{5001} = i)} \\
= \ & \frac{(\frac{3}{4})^m \cdot \frac{4}{7}}{(\frac{3}{4})^m \cdot \frac{4}{7} + (\frac{2}{3})^m \cdot \frac{3}{7}} \\
= \ & \frac{1}{1 + \frac{3}{4}(\frac{8}{9})^m}.
\end{aligned}$$

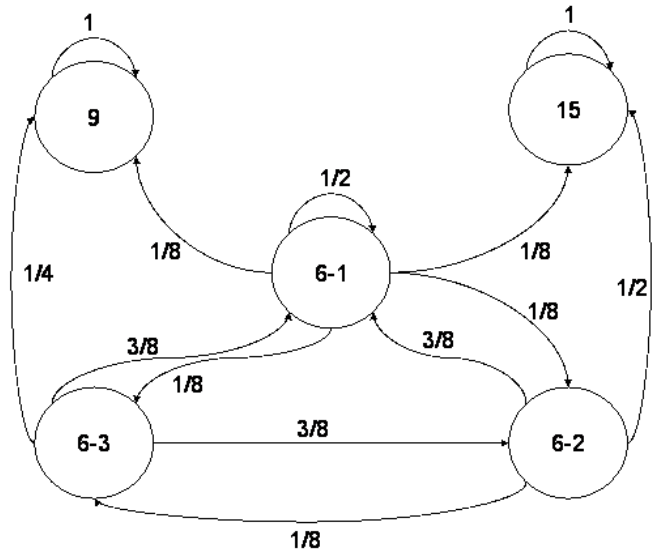
Παίρνοντας το όριο $m \to \infty$ βλέπουμε ότι η παραπάνω πιθανότητα είναι 1. Διαισθητικά αυτό πράγματι ισχύει αφού οι μεταβάσεις $1 \to 1$ είναι πιο πιθανές από τις μεταβάσεις $0 \to 0$.



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2

Άσκηση 3.

(α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το εξής:



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1

Επιθεωρώντας το παραπάνω διάγραμμα, οι καταστάσεις $6-1, 6-2$, και $6-3$ είναι όλες μεταβατικές, αφού κάθε μια από αυτές έχει μονοπάτι που οδηγεί είτε στην κατάσταση 9 ή στη κατάσταση 15. Οι τελευταίες δύο καταστάσεις είναι απορροφητικές διότι δεν υπάρχει επιστροφή από αυτές. Επομένως, η Λίζα εν τέλει αφήνει την τάξη 6 με πιθανότητα 1.

(β) Αυτή είναι απλώς η πιθανότητα απορροφήσεως για την έμμονη κλάση που αποτελείται από την κατάσταση της τάξης 15. Έστω ότι δηλώνουμε την πιθανότητα να απορροφηθούμε από την κατάσταση 15 υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i ως a_i. Τότε θέτοντας υπό όρους και την επόμενη κατάσταση και χρησιμοποιώντας το Ολικό Θεώρημα Πιθανότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
a_{15} &= 1 \\
a_9 &= 0 \\
a_{6-1} &= \frac{1}{2}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{15} + \frac{1}{8}a_{6-2} + \frac{1}{8}a_9 + \frac{1}{8}a_{6-3} \\
a_{6-2} &= \frac{1}{2}a_{15} + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{6-3} \\
a_{6-3} &= \frac{1}{4}a_9 + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{3}{8}a_{6-2}
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχουμε:

$$a_{6-1} = \frac{105}{184} \approx 0.571$$

Επίσης, για τα άλλα a_i προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
a_{6-2} &= 0.77717 \\
a_{6-3} &= 0.50543
\end{aligned}$$

(γ) Ο μέσος αριθμός ημερών αντιστοιχεί στον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την απορρόφηση για την μεταβατική κατάσταση $6-1$. Έστω μ_i ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την απορρόφηση με την προϋπόθεση ότι είμαστε στην κατάσταση i. Τότε θέτοντας υπό όρους και την επόμενη κατάσταση και χρησιμοποιώντας το Ολικό Θεώρημα Πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mu_{15} &= 0 \\
\mu_9 &= 0 \\
\mu_{6-1} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{15} + \frac{1}{8}\mu_{6-2} + \frac{1}{8}\mu_9 + \frac{1}{8}\mu_{6-3} \\
\mu_{6-2} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_{15} + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{6-3} \\
\mu_{6-3} &= 1 + \frac{1}{4}\mu_9 + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{3}{8}\mu_{6-2}
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

$$\mu_{6-1} = \frac{162}{46} = \frac{81}{23} \approx 3.522$$