ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Προόδου

Θέμα 1ο.

Η τ.μ. W μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$W = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} Z_i \ ,$$

όπου $Z_i = X_i - Y_i$. Έχουμε ότι:

$$E[Z_i] = E[X_i] - E[Y_i] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Επίσης, $var(Z_i) = var(X_i) + var(Y_i)$, όπου X_i, Y_i είναι ανεξάρτητες τ.μ., άρα:

$$var(Z_i) = \frac{(1-0)^2}{12} + \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της τ.μ. W είναι:

$$E[W] = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} Z_i = 0 \ ,$$

και η διασπορά:

$$var(W) = \frac{1}{16^2}\sum_{i=1}^{16} var(Z_i) = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{6}.$$

Μπορούμε να κάνουμε χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (ΚΟΘ) καθώς η τ.μ. W εκφράζεται ως το άθροισμα 16 ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τ.μ. Z_i. Δηλαδή,

$$W \sim \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{6}\Big).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
P\Big(\big|W - E[W]\big| < 0.001\Big) &= P\Big(\big|W\big| < 0.001\Big) = P\Big(-0.001 < W < 0.001\Big) \\
&= P\left(-\frac{0.001}{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{6}}} < \frac{W}{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{6}}} < \frac{0.001}{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{6}}}\right) \\
&= P\Big(-0.004\sqrt{6} < \frac{W}{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{6}}} < 0.004\sqrt{6}\Big) \\
&= \Phi(0.004\sqrt{6}) - \Phi(-0.004\sqrt{6}) \\
&= 2\cdot\Phi(0.004\sqrt{6}) - 1.
\end{aligned}$$

Θέμα 2ο.

(α) Λόγω ανεξαρτησίας, οι αφίξεις όλων των οχημάτων (ταξί και λεωφορείων) ακολουθούν *σ.δ.* Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$. Λόγω της έλλειψης μνήμης της *σ.δ.* Poisson, ο χρόνος από την ώρα 07:00π.μ. έως την πρώτη άφιξη οχήματος κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$. Συνεπώς,η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να δουν το πρώτο όχημα είναι $\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

(β) Από τις ιδιότητες συγχώνευσης *σ.δ.* Poisson (σελ. 31), έχουμε ότι:

$$P\Big(\text{πρώτο όχημα ταξί}\Big) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P\Big(\text{πρώτο όχημα λεωφορείο}\Big) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(γ) Εκφράζουμε το $X = W + D$, όπου W είναι ο χρόνος μέχρι την άφιξη του πρώτου οχήματος και D είναι η διάρκεια της διαδρομής. Προφανώς, οι τ.μ. W και D είναι ανέξαρτητες. Επίσης, $W \sim \exp(\lambda_1+\lambda_2)$ και $M_W(s) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2-s}$. Για την τ.μ. D έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_D(s) = E[e^{sD}] &= E[e^{sD}|\text{πρώτο όχημα ταξί}] \cdot P(\text{όχημα ταξί}) \\ &+ E[e^{sD}|\text{πρώτο όχημα λεωφορείο}] \cdot P(\text{όχημα λεωφορείο}) \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1-s}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2-s}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \end{aligned}$$

Λόγω ανεξαρτησίας των τ.μ. W και D ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= M_W(s)\cdot M_D(s) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2-s}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1-s}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2-s}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2-s}\cdot\Big(\frac{\lambda_1\mu_1}{\mu_1-s} + \frac{\lambda_2\mu_2}{\mu_2-s}\Big) \end{aligned}$$

(δ) Έστω ότι

$$D_T : \text{διάρκεια διαδρομής με ταξί}$$
$$D_B : \text{διάρκεια διαδρομής με λεωφορείο}$$

Προφανώς, $Y = \max(D_T, D_B)$. Εναλλακτικά, $Y = Y_1 + Y_2$, όπου

$$Y_1 : \text{ο χρόνος άφιξης στο κέντρο του πρώτου}$$
$$Y_2 : \text{η διαφορά του χρόνου άφιξης του πρώτου από το δεύτερο}$$

Έχουμε ότι:

$$Y_1 \sim \exp(\mu_1+\mu_2) \Rightarrow E[Y_1] = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}.$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E[Y_2] &= E[Y_2|D_T < D_B]\cdot P(D_T < D_B) + E[Y_2|D_T \geq D_B]\cdot P(D_T \geq D_B) \\ &= \frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει ότι

$$E[Y] = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\Big(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\Big).$$

(ε) Προφανώς οι αφίξεις των γρήγορων λεωφορείων ακολουθούν *σ.δ.* Poisson με παράμετρο $(1-p)\lambda_2$. Συνεπώς, η μέση τιμή των αφίξεων αυτών είναι $\ell(1-p)\lambda_2$.

(στ) Η πιθανότητα να δουν k γρήγορα λεωφορεία πριν δουν k αργά είναι ίση με την πιθανότητα να δουν k ή περισσότερα γρήγορα λεωφορεία στα πρώτα $2k-1$:

$$\sum_{i=k}^{2k-1}\binom{2k-1}{i}(1-p)^i p^{2k-1-i}$$