

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
8 Απριλίου 2009 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1:

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_{16}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ορίζουμε:

$$W = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_{16}) - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{16})}{16}.$$

Υπολογίστε την πιθανότητα

$$P(|W - E[W]| < 0.001).$$

Θέμα 2:

Δύο ειδών μεταφορικά μέσα, ταξί και λεωφορεία, κινούνται από το Πανεπιστήμιο προς το κέντρο του Ηρακλείου. Οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων (σε λεπτά της ώρας) για τα ταξί είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με παράμετρο λ_1 , ενώ οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων για τα λεωφορεία είναι επίσης ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με παράμετρο λ_2 . Οι αφίξεις των ταξί είναι ανεξάρτητες των αφίξεων των λεωφορείων.

Ο Χρήστος και ο Ανδρέας φτάνουν στη στάση του Πανεπιστημίου στις 7:00πμ.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να δουν το πρώτο όχημα στην στάση (ταξί ή λεωφορείο);

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το πρώτο όχημα που θα δουν είναι λεωφορείο και ποια είναι η πιθανότητα ότι το πρώτο όχημα που θα δουν είναι ταξί;

Με ταξί, η διάρκεια της διαδρομής από το Πανεπιστήμιο στο κέντρο της πόλης κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο μ_1 . Με λεωφορείο, η διάρκεια της διαδρομής από το Πανεπιστήμιο στο κέντρο της πόλης κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο μ_2 . Όλοι οι χρόνοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

(γ) Υποθέστε ότι ο Χρήστος και ο Ανδρέας φτάνουν στη στάση του Πανεπιστημίου στις 7:00πμ, παίρνουν το πρώτο μεταφορικό μέσο που εμφανίζεται στη στάση και φτάνουν στο κέντρο X λεπτά μετά τις 7:00πμ. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .

(δ) Υποθέστε ότι ένα ταξί και ένα λεωφορείο εμφανίζονται στη στάση ταυτόχρονα, και ότι ο Χρήστος παίρνει το ταξί ενώ ο Ανδρέας παίρνει το λεωφορείο. Έστω Y ο χρόνος σε λεπτά από την αναχώρησή τους από το Πανεπιστήμιο μέχρι τη συνάντησή τους ξανά στο κέντρο. Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[Y]$.

Βοήθεια: Στο υποερώτημα (δ), εκφράστε τη τ.μ. Y ως το άθροισμα: (i) του χρόνου άφιξης στο κέντρο του πρώτου συν (ii) τη διαφορά του χρόνου άφιξης του πρώτου από τον δεύτερο.

Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο κατηγορίες λεωφορείων, τα αργά και τα γρήγορα. Ένα λεωφορείο που φτάνει στη στάση είναι αργό με πιθανότητα p και γρήγορο με πιθανότητα $1 - p$. Το αν ένα λεωφορείο είναι αργό είναι ανεξάρτητο από οτιδήποτε άλλο.

(ε) Αν οι Χρήστος και Ανδρέας μένουν στη στάση για l λεπτά, πόσα γρήγορα λεωφορεία θα δούν κατά μέσο όρο;

(στ) Αν μένουν στη στάση για πάντα, ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος ότι θα δούν k γρήγορα λεωφορεία πριν δουν k αργά;