

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/3/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 22/3/2010

Άσκηση 1 - Ροπογεννήτριες συναρτήσεις. Έστω X_i , $0 \leq i < \infty$, ανεξάρτητες και όμοια κατα-
μετρημένες διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_{X_i}(k) = \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1.$$

Ορίζουμε τις τ.μ. Y και V ως

$$Y = \sum_{i=0}^n X_i,$$

και

$$V = X_n - X_{n-1}.$$

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά των τ.μ. Y και V .

(β) Υπολογίστε τις ροπογεννήτριες των τ.μ. Y , $M_Y(s) = E[e^{sY}]$ και V , $M_V(s) = E[e^{sV}]$.

Άσκηση 2 - Ανισότητα Markov. Η πιθανότητα σφάλματος μετάδοσης ενός bit πληροφορίας μέσω
ενός τηλεπικοινωνιακού καναλιού είναι 10^{-10} . Τίποτε άλλο δεν μας είναι γνωστό σχετικά με τις
στατιστικές ιδιότητες του καναλιού ή των δεδομένων.

(α) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των λάθους bits κατά την μετάδοση ενός πακέτου 1000 bits;

(β) Υπολογίστε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα ότι 10 ή περισσότερα bits μεταδίδονται λάθος
σε ένα πακέτο με 1000 συνολικά bits.

Άσκηση 3 - Η Γκαουσιανή προσέγγιση για το σφάλμα κβάντισης. Υποθέστε ότι 100 πραγ-
ματικοί αριθμοί στρογγυλοποιούνται ο καθένας στον πιο κοντινό του ακέραιο και στην συνέχεια
αθροίζονται. Υποθέστε ακόμα ότι τα σφάλματα στρογγυλοποίησης αποτελούν ανεξάρτητες, ομοιό-
μορφα καταμετρημένες τυχαίες μεταβλητές στο διάστημα $[-0.5, 0.5]$. Χρησιμοποιώντας το κεντρικό
οριακό θεώρημα και τη Γκαουσιανή προσέγγιση, υπολογίστε την πιθανότητα η απόλυτη τιμή του
αθροίσματος των σφαλμάτων να είναι μεγαλύτερη από 5.

Άσκηση 4 - Ανισότητες, Κεντρικό οριακό θεώρημα. Ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι ρίχνεται n φορές.
Έστω X_i το αποτέλεσμα της i -στής ρίψης. Υποθέτουμε ότι οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και ορίζουμε
το άθροισμα των ρίψεων $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Υπολογίστε (ένα άνω όριο για) την πιθανότητα $P(S_{100} \geq 400)$

(α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov.

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.

(γ) Χρησιμοποιώντας προσέγγιση με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 5 - Στοχαστικές διαδικασίες. Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια καταμεμημένων τ.μ. $\{X_n \mid n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή: $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Η στοχαστική διαδικασία (Σ.Δ.) $\{X_n\}$ δίνεται ως είσοδος σε ένα γραμμικό φίλτρο το οποίο παράγει ως έξοδο τη Σ.Δ. $\{Y_n\}$ ως εξής:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} X_{n-k} r^k = X_n + rX_{n-1} + r^2X_{n-2} + r^3X_{n-3} + \dots$$

όπου $|r| < 1$ η σταθερά του παραπάνω λεγόμενου “γεωμετρικού φίλτρου” ή “ολοκληρωτή”.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της εξόδου Y_n .

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της εξόδου, $M_{Y_n}(s) = E[e^{sY_n}]$ και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y_n}(y)$ της Y_n .

(γ) Δείξτε ότι

$$Y_n = rY_{n-1} + X_n.$$

Αυτό είναι γνωστό και ως “φίλτρο αυτοπαλινδρόμησης”.

Άσκηση 6 - Κεντρικό οριακό θεώρημα. Ψηφοφόροι κάποιας περιφέρειας ψήφισαν για έναν από τους υποψηφίους Α και Β. Η αρχική επιβεβαιωμένη καταμέτρηση των ψήφων έδειξε ότι ο υποψήφιος Β προηγείται του Α με 537 ψήφους. Όμως, υπάρχουν 25.600 ψηφοδέλτια τα οποία εκκρεμούν στο εκλογοδικείο και ως εκ τούτου δεν έχουν καταχωρηθεί ακόμα σε κανέναν από τους δύο υποψηφίους.

Υποθέστε ότι τελικά και τα 25.600 ψηφοδέλτια που εκκρεμούν θα βρεθούν έγκυρα και θα αποδοθούν ισοπίθانا στους δύο υποψηφίους, κάθε ένα ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Έστω X και Y οι αριθμοί των ψηφοδελτίων (από τα 25.600) που θα αποδοθούν στους Α και Β, αντίστοιχα.

(α) Τι είδους τυχαία μεταβλητή είναι η X ;

(i) Bernoulli με παράμετρο $p =$

(ii) Poisson με παράμετρο $\lambda =$

(iii) Γεωμετρική με παράμετρο $p =$

(iv) Διωνυμική με παραμέτρους $(n, p) =$

(v) Αρνητική διωνυμική με παραμέτρους $(r, p) =$

(vi) Καμία από τις ανωτέρω αλλά δίνεται από τη σχέση $p_X(k) =$

(β) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της X ;

(γ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με μία πρόταση.

(δ) Από τη στιγμή που και οι 25.600 ψήφοι προσμετρούνται στο τελικό αποτέλεσμα, είναι δυνατόν οι Α και Β να λάβουν τελικά τον ίδιο αριθμό ψήφων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με μία πρόταση.

(ε) Αφού οι 25.600 ψήφοι προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. $Z = X - Y$, του καθαρού κέρδους του υποψηφίου Α στην ψηφοφορία;

(στ) Αφού οι 25.600 ψήφοι προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα, χρησιμοποιείτε το Θεώρημα Κεντρικού Ορίου (ΘΚΟ) για να εκτιμήσετε την πιθανότητα να κερδίσει ο Β την εκλογή.

(ζ) Τώρα, υποθέστε ότι στη συγκεκριμένη εκλογική περιφέρεια, ο Α είναι πιο δημοφιλής από τον Β. Έτσι, κάθε ένα από τα 25.600 ψηφοδέλτια είναι υπέρ του Α με πιθανότητα $p > 0,5$. Π.χ. αν $p = 1$, ο Α θα λάβει και τα 25.600 ψηφοδέλτια και θα κερδίσει την εκλογή από τον Β όταν αυτά προσμετρηθούν στο τελικό αποτέλεσμα. Για κάπως μικρότερες τιμές του p , υπάρχει “αρκετή” πιθανότητα ο Α να προσπεράσει τον Β στην τελική καταμέτρηση. Χρησιμοποιώντας και πάλι το ΘΚΟ, υπολογίστε την ελάχιστη τιμή του p έτσι ώστε η πιθανότητα να κερδίσει ο Α την εκλογή να είναι μεγαλύτερη από 0,5.