ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/03/2010 Ημερομηνία Παράδοσης: 22/03/2010

Άσκηση 1.
(α) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(\sum_{i=0}^{n} X_i) = \sum_{i=0}^{n} E(X_i) = \frac{1}{2}(n+1), \\ E(V) &= E(X_n - X_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

Οι ροπές δευτέρας τάξης μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} X_i X_j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} E(X_i X_j) = (n+1)(\frac{1}{4}n + \frac{1}{2}), \\ E(V^2) &= E(X_n^2) - 2E(X_n X_{n-1}) + E(X_{n-1}^2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε τα υπολογίσουμε τις διασπορές:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(n+1), \\ \sigma_V^2 &= E(V^2) - (E(V))^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned} E(e^{sY}) &= E(e^{s\sum_{i=0}^{n} X_i}) = E(\prod_{i=0}^{n} e^{sX_i}) = \prod_{i=0}^{n} E(e^{sX_i}) \\ &= \prod_{i=0}^{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s)^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(e^{sV}) &= E(e^{s(X_n - X_{n-1})}) = E(e^{sX_n})E(e^{-sX_{n-1}}) \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-s}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cosh(s). \end{aligned}$$

Άσκηση 2.
(α) Εστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές *Bernoulli* $X_1, X_2, ..., X_{1000}$ έχουν κοινή συνάρτηση πιθανότητας μάζας (pmf)

$$X_i = \begin{cases} 1, \mu\epsilon\ \pi\iota\vartheta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 10^{-10} \\ 0, \mu\epsilon\ \pi\iota\vartheta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1 - 10^{-10} \end{cases}$$

Επομένως $E(X_i) = 10^{-10}$. Αν N είναι το πλήθος των λαθών σε 1000 $bits$, τότε

$$E(N) = E(\sum_{i=1}^{1000} X_i) = \sum_{i=1}^{1000} E(X_i) = 1000E(X_i) = 1000 \times 10^{-10} = 10^{-7}.$$

(β) Το άνω όριο μπορεί να βρεθεί από την ανισότητα $Marcov$:

$$P\{N \geq 10\} = P\{N \geq \alpha E(X)\} \leq 1/\alpha,$$

όπου $\alpha = 10^8$ και $E(X) = 10^{-7}$. Επομένως $P\{N \geq 10\} \leq 10^{-8}$. Η μέγιστη πιθανότητα για ≥ 10 λάθη συμβαίνει όταν τα λάθη βρίσκονται σε ομάδες των 10.

Άσκηση 3.
(α) Η μέση τιμή κάθε λάθους στρογγυλοποίησης είναι 0, και η διασπορά είναι $\int_{-0.5}^{0.5} u^2 du = \frac{1}{12}$. Επομένως $E[S] = 0$ και $var(S) = \frac{100}{12} = 8.333$. Επομένως $P[|S| \geq 5] = P[|\frac{S}{\sqrt{8.333}}| \geq \frac{5}{\sqrt{8.333}}]$ $= 2Q(1.73) = 2(1 - \Phi(1.732)) = 0.083$

Άσκηση 4.
(α) $E[X_1] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$ και σύμφωνα με την ανισότητα $Markov$ έχουμε $P[S_{100} \geq 400] \leq \frac{100(3.5)}{400} = \frac{7}{8}$.

(β) $E[X_1^2] = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = 15$. Έχουμε επίσης ότι $var(X_i) = 15 - 3.5^2 = 2.75$. Σύμφωνα με την ανισότητα του $Chebyshev$ $P[S_{100} \geq 400] = P[|S_{100}| - 350 \geq 50] \leq \frac{100(2.75)}{50^2} = 0.11$

(γ) Η προσέγγιση με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα μας δίνει:
$P[S_{100} \geq 400] = P[\frac{S_{100}-350}{\sqrt{(2.75)100}} \geq \frac{400-350}{\sqrt{(2.75)100}}] \approx Q(\frac{400-350}{\sqrt{(2.75)100}}) = Q(3.015) = 1 - \Phi(3.015) \approx 0.0009$

Άσκηση 5.
(α) Η μέση τιμή της X_n είναι 0 και η διασπορά είναι σ^2. Επομένως,

$$E[Y_n] = E[\sum_{k=0}^{\infty} r^k X_{n-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} r^k E[X_{n-k}] = 0.$$

Λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής και της ανεξαρτησίας των X_n έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_n}^2 &= E[(\sum_{k=0}^{\infty} r^k X_{n-k})^2] = E(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} r^k X_k r^j X_j) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} r^k r^j E(X_k X_j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-r^2}. \end{aligned}$$

(β) Ο μετασχηματισμός του X είναι $M_X(s) = e^{s^2\sigma^2/2}$. Τότε,

$$\begin{aligned} E[e^{sY_n}] &= E[e^{s\sum_{k=0}^{\infty} X_{n-k}r^k}] = E[\prod_{k=0}^{\infty} e^{sX_{n-k}r^k}] = \prod_{k=0}^{\infty} E[e^{sX_{n-k}r^k}] \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} M_X(sr^k) = e^{\frac{s^2\sigma^2\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}}{2}} = e^{\frac{s^2\sigma_Y^2}{2}} \end{aligned}$$

όπου είναι ο μετασχηματισμός μιας τυχαίας Γκαουσιανής μεταβλητής με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_Y^2. Θα μπορούσαμε να έχουμε συμπέρασμα για την συνάρτηση πιθανότητας από το γεγονός οτι η Y_n είναι γραμμικός συνδυασμός (με βάρη) ανεξάρτητων τυχαίων Γκαουσιανών μεταβλητών. Επομένως είναι Γκαουσιανή (με μέση τιμή και διασπορά που έχουν ήδη βρεθεί).

(γ) Η εξίσωση της Y_n μας δίνει:

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=0}^{\infty} X_{n-k} r^k = X_n + \sum_{k=1}^{\infty} X_{n-k} r^k = X_n + r \sum_{k=1}^{\infty} X_{n-k} r^{k-1} \\ &= X_n + r \sum_{k=0}^{\infty} X_{n-1-k} r^k = rY_{n-1} + X_n. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

(α) Προφανώς η τ.μ. X είναι διωνυμική με $(n, p) = (25.600, \frac{1}{2})$.

(β)

$$\begin{aligned} E[X] &= np = 25600 \times \frac{1}{2} = 12800 \\ var(X) &= np^2 = 6400 \end{aligned}$$

(γ) Αφού $X + Y = 25600$, οι X, Y δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

(δ) Οι X και Y είναι απαραίτητα και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Ως εκ τούτου, η διαφορά τους, $X - Y$, δεν μπορεί να ισούται με 537 ,την υπεροχή του Β από τον Α. Επομένως, κάποιος από τους Α, Β θα νικήσει.

(ε) Η τ.μ. $Z = X - Y$ έχει μέση τιμή $E[Z] = E[X - Y] = E[2X - 25600] = 2E[X] - 25600 = 0$ και διασπορά $var(X) = var(2X - 25600) = 4var(X^2) = 25600$

(στ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Κεντρικού Ορίου, η τ.μ. Z μπορεί να προσεγγιστεί από μια κανονική τ.μ. με $Z \sim N(0, 25600)$.

Επομένως, $P(\textit{ο Β κερδίζει}) = P(Z \leq 536) \approx \Phi(\frac{536-0}{\sqrt{25600}}) = \Phi(3.35) \cong 0.9996$.

(ζ) Σε αυτήν την περίπτωση, η τ.μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $(25600, p)$. Επομένως η διαφορά $Z = X - Y = 2X - 25600$ έχει $E[Z] = 2E[X] - 25600 = 2 \times 25600p - 25600 = (2p-1)25600$ και διασπορά $var(Z) = 4var(X) = 4 \times 25600p^2$

$P(\textit{ο Α κερδίζει}) = P(Z \geq 538) \cong 1 - P(Z \leq 538) = 1 - \Phi(\frac{538-25600(2p-1)}{\sqrt{var(Z)}}) \geq 0.5$

Το όρισμα της $\Phi(.)$ πρέπει να είναι το πολύ 0, επομένως $538 \leq 25600(2p-1) \Rightarrow p \geq 0.5105$.