

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:
Στοχαστικές Διαδικασίες Αφίξεων Bernoulli και Poisson.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/3/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/4/2010

Άσκηση 1. Βρίσκεστε για εξερεύνηση στο τροπικό δάσος της Νότιας Αμερικής αλλά ξεχάσατε το εντομοαποθητικό σας!

(α) Ως αποτέλεσμα, κάθε δευτερόλεπτο σας τσιμπάει ένα κουνούπι με πιθανότητα 0.2.

(i) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;

(ii) Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;

(iii) Τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα δεν σας έχει τσιμπήσει κανένα κουνούπι. Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά (μετρώντας από $t = 10$.)

(β) Υποθέστε τώρα ότι το δάσος έχει ένα κουνούπι που σας τσιμπάει σε χρόνους εκθετικά κατανεμημένους με παράμετρο $\lambda = 0.2$.

(i) Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;

(ii) Τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα δεν σας έχει τσιμπήσει κανένα κουνούπι. Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά (μετρώντας από $t = 10$.)

Άσκηση 2 - Poisson Αφίξεις.

Τα χρονικά διαστήματα (μετρημένα σε λεπτά της ώρας) μεταξύ των αφίξεων αυτοκινήτων σε ένα σταθμό ελέγχου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικές τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 2$. Οι χρόνοι των διαδοχικών αφίξεων καταχωρούνται σε μικρές κάρτες, όπου κάθε κάρτα έχει χώρο για τρεις καταχωρήσεις. Όταν γεμίζει μία κάρτα, αντικαθίσταται από άλλη.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων;

(β) Δεδομένου ότι κανένα αυτοκίνητο δεν έφτασε τα τελευταία 4 λεπτά, ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού K των αυτοκινήτων που θα φτάσουν τα επόμενα 6 λεπτά;

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή, και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού χρόνου που απαιτείται για να γεμίσουν οι πρώτες 12 κάρτες καταχώρησης.

(δ) Θεωρείστε τα ακόλουθα δύο πειράματα.

- Διαλέγετε τυχαία μία κάρτα από μία στοίβα από συμπληρωμένες κάρτες και σημειώνετε το συνολικό χρόνο, Y , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[Y]$ και $var(Y)$.
- Φτάνετε στο σταθμό ελέγχου μία τυχαία χρονική στιγμή. Όταν η κάρτα που χρησιμοποιείται τη στιγμή της άφιξής σας γεμίσει, σημειώνετε το συνολικό χρόνο, W , που η κάρτα βρισκόταν σε χρήση. Υπολογίστε τα $E[W]$ και $var(W)$.

Βοήθεια: Στο υποερώτημα (δ), σκεφτείτε το παράδοξο της τυχαίας εμφάνισης.

Άσκηση 3 - Poisson Αφίξεις.

Ο Κώστας προσπαθεί να πάει στο Χαλάνδρι από την Κατεχάκη. Γνωρίζει ότι υπάρχουν δύο γραμμές λεωφορείων που θα τον παν στον προορισμό του. Η μία γραμμή ξεκινά από το Σύνταγμα ενώ η άλλη ξεκινά από την Ομόνοια. Τα λεωφορεία από το Σύνταγμα και την Ομόνοια καταφθάνουν στην Κατεχάκη με εκθετικά κατανεμημένους και ανεξάρτητους μεταξύ τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων με μέσες τιμές μ_s και μ_o , αντίστοιχα. Τα λεωφορεία από το Σύνταγμα και την Ομόνοια ταξιδεύουν με σταθερές ταχύτητες, v_s και v_o , αντίστοιχα. Η Κατεχάκη βρίσκεται σε απόσταση l_s από το Σύνταγμα και σε απόσταση l_o από την Ομόνοια.

(α) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα λεωφορείο που φτάνει στην Κατεχάκη, ποια είναι η πιθανότητα ότι το λεωφορείο έρχεται από το Σύνταγμα;

(β) Δεδομένου ότι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων του τέταρτου και πέμπτου λεωφορείου, X_5 , είναι μεγαλύτερος από t , ποια η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ) της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X_5 ;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον λεωφορείο το οποίο κατευθύνεται προς τον Κώστα (δηλαδή ένα τουλάχιστον λεωφορείο το οποίο κατευθύνεται από το Σύνταγμα ή την Ομόνοια προς την Κατεχάκη).

(δ) Όσο περιμένει το λεωφορείο, ο Κώστας αποκοιμείται. Όσο κοιμάται, 4 συνεχόμενα λεωφορεία περνούν. Ποια είναι η ΣΠΠ του χρόνου μεταξύ των αφίξεων του πρώτου και του τέταρτου λεωφορείου;

(ε) Στην στάση ο Κώστας περιμένει και κάποιον φίλο του ο οποίος αργεί να έρθει. Καθώς βαριέται να περιμένει, ο Κώστας αποφασίζει να ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα κάθε φορά που περνά ένα λεωφορείο. Ποια είναι η ΣΠΠ της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο διαδοχικών "κεφαλών";