ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/03/2010 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/04/2010

Άσκηση 1.
(α) *i.* Εφόσον κάθε δευτερόλεπτο είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλο (π.χ αν ένα κουνούπι προσγειώθηκε στο λαιμό σας το προηγούμενο δευτερόλεπτο, δεν επηρεάζει την πιθανότητα ενός άλλου κουνουπιού να προσγειωθεί σε αυτό ή στο επόμενο δευτερόλεπτο), η συνάρτηση πιθανότητας για τον χρόνο μέχρι να προσγειωθεί το πρώτο κουνούπι είναι η γεωμετρική με παράμετρο 0.2.

$$P_T(t) = \begin{cases} (0.8)^{t-1}(.2), t \geq 1 \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

ii. Η μέση τιμή της γεωμετρικής τ.μ. με παράμετρο p είναι $\frac{1}{p}$, επομένως ο μέσος χρόνος μέχρι το πρώτο κουνούπι να προσγειωθεί στο σώμα είναι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

iii. Το σενάριο όπου κουνούπια ανεξάρτητα προσγειώνονται πάνω σας μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία διαδικασία *Bernoulli*, με κάθε δοκιμή *Bernoulli* να είναι το γεγονός όπου ένα κουνούπι προσγειώνεται πάνω σας σε ένα συγκεκριμένο δευτερόλεπτο. Επειδή η διαδικασία *Bernoulli* δεν έχει μνήμη, δεν έχει σημασία πότε σας τσίμπησε για το πρώτο δευτερόλεπτο ή τα πρώτα 10, 20 ή 200 δευτερόλεπτα. Επομένως, η μέση τιμή του χρόνου μετρώντας από τη στιγμή $T = 10$ είναι πάλι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

(β) *i.* Επειδή ο χρόνος μέχρι να εμφανιστεί το πρώτο κουνούπι είναι εκθετικά κατανεμημένος, ο μέσος χρόνος μέχρι να προσγειωθεί είναι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

ii. Δείξαμε στην τάξη ότι η εκθετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης. Επομένως, ο μέσος χρόνος μετρώντας από τη στιγμή $T = 10$ είναι ο ίδιος, δηλαδή $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

Άσκηση 2 - *Poisson* Αφίξεις.
(α) Το χρονικό διάστημα T μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$.
Συνεπώς:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5 \; \lambda\epsilon\pi\tau\acute{\alpha}.$$

(β) Προφανώς, πρόκειται για αφίξεις κατά *Poisson* με ρυθμό λ. Λόγω της ιδιότητας νέας αρχής, η τ.μ. K ακολουθεί *Poisson* κατανομή με παράμετρο $6\lambda = 12$:

$$p_K(k) = \frac{12^k e^{-12}}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

(γ) Οι πρώτες 12 κάρτες γεμίζουν με την 36η άφιξη αυτοκινήτου. Έστω D ο συνολικός χρόνος που απαιτείται. Τότε $D = T_1 = T_2 + ... + T_{36}$, όπου T_i ανεξάρτητες, εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με $\lambda = 2$. Συνεπώς η D ακολουθεί κατανομή *Erlang* τάξης 36:

$$\begin{aligned} f_D(t) &= \frac{2^{36} t^{35} e^{-2t}}{35!}, t \geq 35 \\ E(D) &= 36E[T] = 18 \\ M_D(s) &= M_{T_1}(s)...M_{T_{36}}(s) = (\frac{2}{2-s})^{36} \end{aligned}$$

(δ) *i.* Στην πρώτη περίπτωση προφανώς $Y = T_1 + T_2 + T_3$ και η Y ειναι τ.μ. *Erlang* 3ης τάξης με $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \frac{3}{\lambda} = 1.5 \\ var(Y) &= \frac{3}{\lambda^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ii. Σε αυτήν την περίπτωση, $W = T_1 + T_2 + L$, όπου L είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ αφίξεων που περιέχουν την χρονική στιγμή που φτάσαμε στο σταθμό ελέγχου. Σύμφωνα με όσα είπαμε όταν μελετούσαμε το παράδοξο της τυχαίας άφιξης, L : *Erlang* 2ης τάξης με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς η W είναι *Erlang* 4ης τάξης:

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{4}{\lambda} = 2 \\ var(W) &= \frac{4}{\lambda^2} = 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α) Από την εκφώνηση, έχουμε ότι οι χρόνοι άφιξης είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με μέσες τιμές $\mu_s = \frac{1}{\lambda_s}$ και $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_0}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, ορίζονται δύο ανεξάρτητες *σ.δ. Poisson* με ρυθμούς λ_s και λ_0 αντίστοιχα.

Αν θεωρήσουμε τη συνολική *σ.δ.* των αφίξεων λεωφορείων στην Κατεχάκη, αυτή είναι μια νέα *Poisson σ.δ.* με ρυθμό $\lambda_s + \lambda_0$. Δεδομένης μιας άφιξης της συνολικής *σ.δ.* η πιθανότητα ότι η άφιξη προέρχεται από τη *σ.δ.* S (Σύνταγμα) είναι $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_0}$.

(β) Για τη συνολική *σ.δ.* οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_0$. Η εκθετική κατανομή δεν έχει μνήμη και επομένως δεδομένου του γεγονότος $X_5 > t$, η X_5 είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_0$:

$$f_{X_5/\{X_5>t\}}(x/X_5 > t) = (\lambda_s + \lambda_0) e^{-(\lambda_s+\lambda_0)(x-t)}, x \geq t.$$

(γ) Ένα λεωφορείο από το Σύνταγμα ή την Ομόνοια κάνει l_s/v_s ή l_0/v_0 μονάδες χρόνου, αντίστοιχα, να φτάσει στην Κατεχάκη. Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(\textit{λεωφορείο καθ' οδόν}) &= 1 - P(\textit{κανένα λεωφορείο καθ' οδόν}) \\
&= 1 - P(\textit{κανένα λεωφορείο από Σύνταγμα ΚΑΙ κανένα λεωφορείο από Ομόνοια }) \\
&= 1 - P(\textit{κανένα λεωφορείο από Σύνταγμα }) \cdot P(\textit{κανένα λεωφορείο από Ομόνοια}) \\
&\ \ [\textit{ανεξάρτητες ς.δ. από Poisson}] \\
&= 1 - \frac{(\lambda_s \frac{l_s}{v_s})^0 e^{-\lambda_s \frac{l_s}{v_s}}}{0!} \cdot \frac{(\lambda_0 \frac{l_0}{v_0})^0 e^{-\lambda_0 \frac{l_0}{v_0}}}{0!} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_s \frac{l_s}{v_s} + \lambda_0 \frac{l_0}{v_0})}
\end{aligned}$$

(δ) Οι χρόνοι X_i των αφίξεων μεταξύ του i-στού και $(i+1)$-στού λεωφορείου είναι ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο $\lambda_s + \lambda_0$. Επομένως, η τ.μ. Y, ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων του 1ου και 4ου λεωφορείου είναι μια *Erlang* τ.μ. 3ης τάξης.
Συνεπώς, για την $Y = X_1 + X_2 + X_3$,

$$f_Y(y) = \frac{(\lambda_s + \lambda_0)^3 y^2 e^{-(\lambda_s+\lambda_0)y}}{2!}, y \geq 0$$

(ε) Θεωρούμε την "*split*" *σ.δ. Poisson* όπου μια άφιξη συμβαίνει όταν έρχεται ένα λεωφορείο και όταν ο Κώστας φέρνει Κεφαλή. Καθώς οι αφίξεις των λεωφορείων και οι ρίψεις του κέρματος είναι ανεξάρτητα πειράματα, η νέα "*split*" *σ.δ. Poisson* έχει παράμετρο $\lambda = p(\lambda_s + \lambda_0)$, δηλαδή $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_0)$ (δίκαιο κέρμα).
Για αυτή τη *σ.δ.* οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων θα ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Συνεπώς, η ΣΠΠ της χρονικής διάρκειας μεταξύ δύο διαδοχικών κεφαλών είναι:

$$f_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_0) e^{-\frac{1}{2}(\lambda_s+\lambda_0)t}, t \geq 0 \\ 0, \textit{αλλιώς} \end{cases}$$