

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων:
Μαρκοβιανές Αλυσίδες.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/5/2010

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/5/2010

Άσκηση 1. Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με έξι καταστάσεις $\{S_0, \dots, S_5\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0 , υπολογίστε την πιθανότητα ότι

- (α) το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά την χρονική στιγμή k .
- (β) το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την S_4 .
- (γ) το σύστημα επισκέπτεται την S_2 και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.
- (δ) το σύστημα επισκέπτεται την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 3$.
- (ε) το σύστημα βρίσκεται στην S_3 αμέσως μετά την n -στή χρονική στιγμή.

Άσκηση 2. Δύο εταιρίες ανταγωνίζονται η μία την άλλη στην αγορά αναψυκτικών (π.χ. Pepsi vs. Coca Cola). Κάθε μία προσπαθεί να ξεπεράσει την άλλη μέσω της διαφήμισης. Αν κάποια χρονιά οι εταιρίες έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό για διαφήμιση, υπάρχει 50% πιθανότητα ότι θα έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό την επόμενη χρονιά και αν δεν έχουν, υπάρχει ίση πιθανότητα ότι κάποια από τις δύο θα ξοδέψει περισσότερα. Αν η μία εταιρία ξοδέψει περισσότερα τη μία χρονιά, την επόμενη χρονιά η άλλη εταιρία θα ξοδέψει περισσότερα με πιθανότητα $2/3$ ενώ θα ξοδέψουν το ίδιο με πιθανότητα $1/3$.

- (α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω σύστημα με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα.
- (β) Ποια η οριακή πιθανότητα ότι σε μία χρονιά στο απώτερο μέλλον οι δύο εταιρίες θα έχουν ίδιους προϋπολογισμούς διαφήμισης;

Άσκηση 3. Στο ταμείο της καφετερίας του Πανεπιστημίου εργάζεται μόνο μία υπάλληλος. Λόγω έλλειψης χώρου, επιτρέπει να σχηματίσουν ουρά μπροστά της μόνο M φοιτητές. Αν φτάνοντας στην ουρά κάποιος φοιτητής βρει μπροστά του M συμφοιτητές του (μαζί με αυτόν που εξυπηρετείται εκείνη τη στιγμή), φεύγει αμέσως. Κάθε λεπτό συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα γεγονότα :

- ένας νέος φοιτητής φτάνει με πιθανότητα p ,
- ένας φοιτητής φεύγει με πιθανότητα kq , όπου k είναι ο αριθμός των φοιτητών στην καφετέρια,
- κανένας νέος φοιτητής δεν φτάνει ούτε υπάρχων φεύγει με πιθανότητα $1 - p - kq$ (αν υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής στην καφετέρια) ή με πιθανότητα $1 - p$ (αν δεν υπάρχει).

(α) Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεως-θανάτου. Ορίστε τις κατάλληλες καταστάσεις και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Επισκέπτεστε την καφετέρια αφού αυτή είναι ανοιχτή για αρκετό χρόνο. Πόσους πελάτες περιμένετε να βρείτε στην ουρά;

Άσκηση 4. Στη Μαρία αρέσει να τζογάρει. Πηγαίνει λοιπόν στο Las Vegas και αρχίζει με 200 ευρώ στην τσέπη. Σε κάθε προσπάθεια μπορεί να ποντάρει είτε 100 είτε 200 ευρώ (αν έχει αρκετά λεφτά). Κερδίζει με πιθανότητα p . Στόχος της είναι να διπλασιάσει τα λεφτά της και να φύγει με 400 ευρώ. Σταματάει όταν επιτύχει το στόχο της ή όταν χάσει τα λεφτά της.

(α) Όποτε η Μαρία έχει μόνο 100 ευρώ, προφανώς μπορεί να ποντάρει μόνο 100 ευρώ. Επίσης, ποντάρει 100 ευρώ όποτε έχει 300 ευρώ. Βοηθείστε την να αποφασίσει σε μία στρατηγική για το πόσα λεφτά να ποντάρει όταν έχει 200 ευρώ, ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να κερδίσει (δηλαδή να φύγει με τα 400 ευρώ). Με άλλα λόγια, όταν έχει 200 ευρώ, πρέπει να ποντάρει 100 ή 200 ευρώ;

Βοήθεια: Αναλύστε τις περιπτώσεις για τις 2 στρατηγικές. Η περίπτωση που ποντάρει 200 ευρώ είναι εύκολη. Για την περίπτωση που ποντάρει 100 ευρώ, σχηματίστε το γράφημα της κατάλληλης αλυσίδας Μαρκο.

(β) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών μέχρις ότου χάσει τα λεφτά της ή τα διπλασιάσει για $p = 0.75$ και ακολουθώντας τη βέλτιστη στρατηγική;