

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
8 Ιουνίου 2010 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1 - 50 μονάδες.

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις 1 και 2. Έχουμε ότι:

$$P(X_n = 1 / X_{n-1} = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_n = 2 / X_{n-1} = 2) = \frac{1}{2}$$

- (α) Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 2 / X_{n-1} = 1)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 2 / X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 2 / X_{n-2} = 2)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_3 = 1)$ όταν $P(X_1 = 1) = 1/2$.
- (στ) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

Θέμα 2 - 50 μονάδες.

Ο Κώστας πηγαίνει στο Las Vegas. Δε θέλει να χάσει πάρα πολλά λεφτά οπότε αποφασίζει να παίξει μόνο με 3\$ και να σταματήσει να παίξει όταν θα τα έχει κάνει 5\$ ή όταν θα τα έχει χάσει όλα. Πλησιάζει μία ρουλέτα η οποία έχει 18 κόκκινες, 18 μαύρες και 2 πράσινες θέσεις. Αποφασίζει ότι πάντα θα ποντάρει 1\$ στο κόκκινο.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του παιχνιδιού του Κώστα. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;

(β) Με τι πιθανότητα θα φύγει ο Κώστας χαρούμενος από το καζίνο; Με τι πιθανότητα θα φύγει χαμένος; Πως μεταβάλλονται αυτές οι πιθανότητες αν αρχίζει το παιχνίδι με 2\$;

(γ) Πόσο θα διαρκέσει η διασκέδαση του Κώστα στη ρουλέτα; Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών μέχρις ότου χάσει τα λεφτά του ή φύγει με 5\$ στην τσέπη;