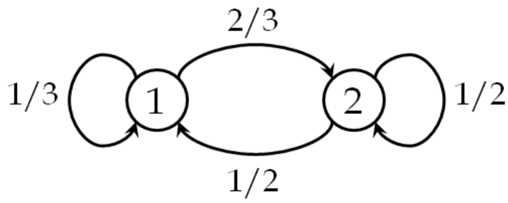
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-317 Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Λύσεις Τελικής Εξέτασης - Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Θέμα 1



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα θέματος 1 (α)

(α) Ο πίνακας πιθανότητας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(β) $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) = \frac{2}{3}$

(γ) $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2) = P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) = \frac{2}{3}$

(δ)

$$\begin{aligned} P(X_n = 2/X_{n-2} = 2) &= P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2)P(X_{n-1} = 1/X_{n-2} = 2) \\ &+ P(X_n = 2/X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 2)P(X_{n-1} = 2/X_{n-2} = 2) \\ &= P(X_n = 2/X_{n-1} = 1)P(X_{n-1} = 1/X_{n-2} = 2) \\ &+ P(X_n = 2/X_{n-1} = 2)P(X_{n-1} = 2/X_{n-2} = 2) \\ &= P_{12}P_{21} + P_{22}P_{22} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

(ε) $P(X_3 = 1) = P(X_1 = 1)(P_{11}P_{11} + P_{12}P_{21}) + P(X_1 = 2)(P_{21}P_{11} + P_{22}P_{21}) = \cdots = \frac{31}{72}$

(στ)

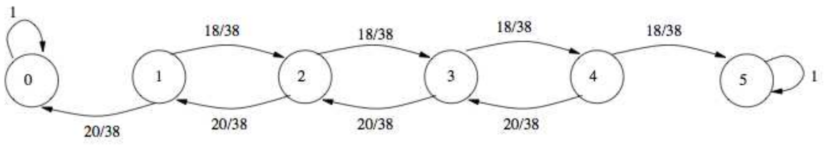
$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$
$$\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

Το σύστημα μας δίνει: $\frac{2}{3}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$. Όμως $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Συνεπώς $\pi = \frac{3}{7}$ και $\pi_2 = \frac{4}{7}$

Θέμα 2



Σχήμα 2: Μαρκοβιανή αλυσίδα θέματος 2 (α)

(α) Ως κατάσταση του συστήματος ορίζουμε τον αριθμό των δολλαρίων που ο Κώστας έχει στην τσέπη του $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο σχήμα 2 και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20/38 & 0 & 18/38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20/38 & 0 & 18/38 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20/38 & 0 & 18/38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20/38 & 0 & 18/38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι καταστάσεις 0 και 5 είναι έμμονες, ενώ οι 1, 2, 3, 4 είναι μεταβατικές.

(β) Ζητούμε ουσιαστικά τις πιθανότητες απορροφήσεως του συστήματος από τις καταστάσεις $s = 0$ και $s = 5$, όταν αυτό ξεκινά από τις καταστάσεις $i = 3$ ή $i = 2$
$a_i \triangleq P(X_n = s/X_0 = i)$. Έστω ότι $s = 0$ (ο Κώστας φεύγει χαμένος). Οι πιθανότητες απορροφήσεως a_i ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα (σελίδα 75 των σημειώσεων).

$$a_0 = 1,\ a_5 = 0,\ a_i = \sum_{j=D}^{5} P_{ij} a_j \text{ για } i = 1, 2, 3, 4$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = P_{10} \cdot a_0 + P_{12} \cdot a_2 \\ a_2 = P_{21} \cdot a_1 + P_{23} \cdot a_3 \\ a_3 = P_{32} \cdot a_2 + P_{34} \cdot a_4 \\ a_4 = P_{43} \cdot a_3 + P_{45} \cdot a_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} a_1 = \frac{20}{38} \cdot 1 + \frac{18}{38} \cdot a_2 \\ a_2 = \frac{20}{38} \cdot a_1 + \frac{18}{38} \cdot a_3 \\ a_3 = \frac{20}{38} \cdot a_2 + \frac{18}{38} \cdot a_4 \\ a_4 = \frac{20}{38} \cdot a_3 + \frac{18}{38} \cdot 0 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8398 \\ 0.6618 \\ 0.4640 \\ 0.2442 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η πιθανότητα να φύγει χαμένος από το καζίνο, ενώ έχει μπει μέσα με 3\$ είναι $a_3 = 0.6618$. Αν ξεκινούσε με 2\$ θα έφυγε χαμένος από το καζίνο με πιθανότητα $a_2 = 0.8389$. Καθώς υπάρχουν μόνο δύο έμμονες καταστάσεις, η πιθανότητα το σύστημα να απορροφειθεί από της $s = 5$(ο Κώστας να φύγει χαρούμενος) είναι:

$$1 - a \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1602 \\ 0.3382 \\ 0.5360 \\ 0.7558 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα η πιθανότητα να φύγει χαρούμενος από το καζίνο, ενώ έχει μπει μέσα με 3\$ είναι 0.5360, ενώ αν έχει μπει με 2\$ είναι 0.3382.

(γ) Ζητούμε το μέσο χρόνο απορροφήσεως του συστήματος ξεκινώντας από την κατάσταση $i = 3$, μ_3 (σελίδα 81 των σημειώσεων):

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_5 = 0 \\ \mu_i &= 1 + \sum_{j=0}^{5} P_{ij}\mu_j \text{ για } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε λύνοντας το παρακάτω σύστημα βρίσκουμε το μ_3:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{20}{38}\mu_0 + \frac{18}{38}\mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + \frac{20}{38}\mu_1 + \frac{18}{38}\mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + \frac{20}{38}\mu_2 + \frac{18}{38}\mu_4 \\ \mu_4 &= 1 + \frac{20}{38}\mu_3 + \frac{18}{38}\mu_5 \end{aligned}$$