ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Προόδου 21-4-2010

Θέμα 1ο

Ορίζουμε τη δείκτρια τ.μ. $X_i,\ i = 1, 2, \dots, 365$, ως εξής:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \textit{όταν βρέχει τη } i\textit{-στή μέρα} \\ 0, & \textit{όταν δε βρέχει τη } i\textit{-στή μέρα} \end{cases}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι τ.μ. X_i είναι *Bernoulli* ανεξάρτητες τ.μ. με παράμετρο $p = 0.1$.
Επομένως,

$$E[X_i] = p = 0.1$$
$$var(X_i) = p(1-p) = 0.1 \times 0.9 = 0.09$$

Συνεπώς, το πλήθος των βροχερών ημερών κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι:

$$S_{365} = X_1 + \cdots + X_{365}$$

Η τ.μ. S_{365} ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $S_{365} \sim \Delta(n = 365,\ p = 0.1)$.
Προφανώς,

$$P(S_{365} \geq 100) = \sum_{k=100}^{365} \binom{365}{k} 0.1^k \, 0.9^{365-k}$$

Κάνοντας χρήση του Κ.Ο.Θ.,

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 100) &= P\left(\frac{S_{365} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{100 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{S_{365} - 365 \times 0.1}{\sqrt{365 \times 0.1 \times 0.9}} \geq \frac{100 - 365 \times 0.1}{\sqrt{365 \times 0.1 \times 0.9}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{63.5}{0.3\sqrt{365}}\right) = 1 - \Phi\left(11.08\right) \end{aligned}$$

Θέμα 2ο

(α) Έστω R ο συνολικός αριθμός των μηνυμάτων που φτάνουν στο δέκτη και από τους δύο πομπούς. Προφανώς, η τ.μ. R ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B)t$.

Επομένως,

$$P(R = 9) = p_R(9) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B)t]^9}{9!} \, e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}$$

(β) Η τ.μ. N μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$N = W_1 + \cdots + W_R$$

όπου W_i είναι το πλήθος των λέξεων στο i-οστό μήνυμα. Δηλαδή, το N εκφράζεται ως το άθροισμα ενός *τυχαίου* αριθμού, R, τυχαίων μεταβλητών W_i.

Έστω ότι r μηνύματα φτάνουν σε χρόνο t, δηλ. $R = r$. Τότε,

$$E[N|R = r] = E[W_1 + \cdots + W_r] = rE[W_i]$$

Από το Θ.Ο.Μ.Τ., προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{r=0}^{+\infty} p_R(r)\, E[N|R = r] \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} p_R(r)\, rE[W_i] \\ &= E[R] \cdot E[W_i] \end{aligned}$$

Αλλά,

$$E[W_i] = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

ενώ

$$E[R] = (\lambda_A + \lambda_B)t$$

Τελικά, $E[N] = \dfrac{11}{6}(\lambda_A + \lambda_B)t$.

(γ) Μηνύματα 3 λέξεων φτάνουν από τον πομπό A σύμφωνα με μία *Poisson* σ.δ., με ρυθμό

$$\lambda_A \cdot P(W = 3) = \lambda_A \cdot p_W(3) = \frac{\lambda_A}{6}$$

Συνεπώς, ο χρόνος, X, έως τη λήψη 8 μηνυμάτων τριών λέξεων ακολουθεί κατανομή *Erlang* τάξης 8, με παράμετρο $\dfrac{\lambda_A}{6}$:

$$f_X(x) = \frac{(\lambda_A/6)^8\, x^7}{7!}\, e^{-\frac{\lambda_A}{6}x}, \quad x \geq 0$$

(δ) Η πιθανότητα ένα μήνυμα που λαμβάνεται στο δέκτη να προέρχεται από τον πομπό A είναι $\lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$. Τα μηνύματα που προέρχονται από τον A ορίζουν μια σ.δ. *Bernoulli* με παράμετρο $\lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$. Επομένως, το πλήθος των μηνυμάτων που προέρχονται από τον πομπό A ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 12$ και $p = \lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\binom{12}{8} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^8 \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^4$$