

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/3/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 16/3/2011

Άσκηση 1.

Κατά τη διάρκεια της καλοκαιρινής πρακτικής άσκησης σας, εργάζεστε σε ένα εργοστάσιο παραγωγής μικροεπεξεργαστών. Ο επιβλέπων σας ζητά να εκτιμήσετε την ποιότητα της γραμμής παραγωγής, δηλαδή την πιθανότητα p ένας μικροεπεξεργαστής να μην είναι ελαττωματικός. Υποθέτουμε ότι οι μικροεπεξεργαστές είναι καλοί με την ίδια πιθανότητα p και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

(α) Υποθέτοντας ότι τεστάρετε ένα σύνολο από n τυχαία επιλεγμένους μικροεπεξεργαστές, ορίστε μία εκτιμήτρια Z_n για την παράμετρο p , έτσι ώστε η Z_n να συγκλίνει στο p ως προς την πιθανότητα.

(β) Ο επιβλέπων σας ζητά η εκτιμήτρια Z_n να βρίσκεται στη γειτονιά τιμών $p \pm 0.1$ με πιθανότητα 0.95. Αρκεί να τεστάρετε 27 τυχαία επιλεγμένους μικροεπεξεργαστές για να ικανοποιήσετε αυτή την απαίτηση; Χρησιμοποιήστε τόσο την ανισότητα Chebyshev όσο και το κεντρικό οριακό θεώρημα για την ανάλυσή σας ώστε να απαντήσετε στο ερώτημα.

Άσκηση 2 - Markov Inequality.

Η πιθανότητα σφάλματος μετάδοσης ενός bit πληροφορίας (bit error rate) πάνω από ένα δυαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι είναι 10^{-10} . Δεν γνωρίζουμε τίποτα άλλο σχετικά με τις στατιστικές των δεδομένων ή του καναλιού.

(α) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των bits που μεταδίδονται λάθος σε ένα πακέτο από 1000 bits;

(β) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα του γεγονότος σε ένα πακέτο με 1000 bits, 10 ή περισσότερα να μεταδίδονται λάθος.

Άσκηση 3 - De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής.

Πόλλα τυχερά παιχνίδια στα καζίνο μεροληπτούν ελαφρά εις βάρος του πελάτη ώστε το καζίνο να βγάζει κέρδος χωρίς όμως να αποθαρρύνονται οι παίκτες να παίζουν. Φανταστείτε ένα τέτοιο παιχνίδι όπου η πιθανότητα να κερδίσει το καζίνο είναι 0.51. Έστω ότι παίζετε 400 φορές το παιχνίδι, και έστω L μία τ.μ. που ορίζεται ως το πλήθος των φορών που χάνετε. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες:

(α) $P(190 \leq L \leq 210)$.

(β) $P(210 \leq L \leq 230)$.

Άσκηση 4

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Για $i = 1, 2, 3, \dots$, ορίζουμε:

$$Y_i = \frac{1}{3}X_i + \frac{2}{3}X_{i+1}.$$

- (α) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των τ.μ. Y_i και Y_{i+1} . Είναι οι τ.μ. Y_i ασυσχέτιστες; Είναι ανεξάρτητες;
(β) Είναι οι τ.μ. Y_i όμοια κατανομημένες;
(γ) Έστω

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Συγκλίνει η τ.μ. M_n στην τιμή μ ως προς την πιθανότητα;

Άσκηση 5 - Συνδιασπορά (1).

Έστω X και Y τ.μ. με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 9$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

- (α) Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$.
(β) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ. T και U , $cov(T, U)$.
(γ) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $var(W)$.

Άσκηση 6 - Συνδιασπορά (2). Έστω $X_1, X_2, \dots$ μία αριθμήσιμα άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων, όμοια κατανομημένων τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Ορίζουμε τις τ.μ. $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$, για $n = 1, 2, \dots$. Για κάθε $k \geq 0$, υπολογίστε τις συνδιασπορές $cov(Y_n, Y_{n+k})$.