

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/3/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 30/3/2011

Άσκηση 1

Ένας υπολογιστής εξυπηρετεί προγράμματα που καταθέτουν δύο χρήστες. Ο χρόνος χωρίζεται σε χρονικές σχισμές (time slots). Μία χρονική σχισμή μπορεί να είναι ανενεργή με πιθανότητα $p_I = 1/6$ και ενεργή με πιθανότητα $p_B = 5/6$. Κατά τη διάρκεια μιας ενεργούς σχισμής, υπάρχει πιθανότητα $p_{1/B} = 2/5$ (αντίστοιχα, $p_{2/B} = 3/5$) ότι εκτελείται ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 (αντίστοιχα, από το χρήστη 2). Υποθέτουμε ότι γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα.

(α) Βρείτε την πιθανότητα ότι ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 εκτελείται για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια της 4ης χρονικής σχισμής.

(β) Δεδομένου ότι ακριβώς 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές, βρείτε την πιθανότητα ότι η 6η ανενεργή χρονική σχισμή είναι η σχισμή 12.

(γ) Βρείτε το μέσο αριθμό των χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανομένης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

(δ) Βρείτε το μέσο αριθμό των *ενεργών* χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανομένης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

(ε) Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά του αριθμού των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

Άσκηση 2 - Τυχαία εμφάνιση στη διαδικασία Bernoulli.

Ο αδερφός σας παίζει το ίδιο βίντεο-παιχνίδι συνεχώς. Υποθέστε ότι κερδίζει κάθε παιχνίδι με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα άλλων παιχνιδιών. Τα μεσάνυχτα μπαίνετε στο δωμάτιό του και διαπιστώνετε ότι χάνει το παρόν παιχνίδι. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των χαμένων παιχνιδιών μεταξύ της πιο πρόσφατης νίκης και της πρώτης μελλοντικής νίκης;

Άσκηση 3

Ένας αστυνομικός σταματάει αυτοκίνητα για υπερβολική ταχύτητα. Το πλήθος των κόκκινων σπορ αυτοκινήτων που σταματά σε διάρκεια μίας ώρας ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό 4, ενώ το πλήθος των υπόλοιπων αυτοκινήτων που σταματά σε διάρκεια μίας ώρας ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό 2. Υποθέτουμε ότι οι δύο διαδικασίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο αστυνομικός σταματά τουλάχιστον 2 κοινά αυτοκίνητα πριν σταματήσει 3 κόκκινα σπορ αυτοκίνητα.

Άσκηση 4

Δύο πελάτες A και B υποβάλλουν εργασίες σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς a και b εργασίες ανά ώρα, αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς οκτώ από τις επόμενες δώδεκα εργασίες να προέρχονται από τον πελάτη A.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα υποβολής επτά εργασιών κατά τη διάρκεια t ωρών.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. M , του πλήθους των εργασιών που υποβάλλονται από τον πελάτη A έως και το χρόνο υποβολής της 6ης εργασίας από τον πελάτη B.

Το πλήθος των προγραμμάτων σε κάθε υποβληθείσα εργασία μπορεί να είναι 2 ή 3 ή 4 με ίση πιθανότητα $1/3$. Το πλήθος των προγραμμάτων σε κάθε εργασία είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλη εργασία καθώς και από τον πελάτη από τον οποίο προέρχεται η εργασία.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι 4 πρώτες εργασίες περιέχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό προγραμμάτων.

(ε) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X , του χρονικού διαστήματος μέχρι τη λήψη 5 εργασιών με 3 προγράμματα η καθεμία από τον πελάτη A.

Άσκηση 5

Η Γεωργία παίρνει μέρος σε μία εξέταση πολλαπλών επιλογών (multiple choice exam). Μπορείτε να υποθέσετε ότι το πλήθος των ερωτήσεων είναι άπειρο. Ταυτόχρονα αλλά ανεξάρτητα, το συνειδητό και το υποσυνειδητό της Γεωργίας απαντούν στις ερωτήσεις, καθένα σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες Poisson διαδικασίες (το συνειδητό και το υποσυνειδητό της πάντα δουλεύουν σε διαφορετικές ερωτήσεις). Απαντήσεις από το συνειδητό (υποσυνειδητό) της Γεωργίας δημιουργούνται με ρυθμό λ_c (λ_s) απαντήσεις ανά λεπτό. Υποθέτουμε ότι $\lambda_c \neq \lambda_s$.

Κάθε συνειδητή απάντηση αποτελεί μια ανεξάρτητη δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα p_c να είναι σωστή. Ομοίως, κάθε υποσυνειδητή απάντηση αποτελεί μια άλλη ανεξάρτητη δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα p_s να είναι σωστή. Η Γεωργία απαντά μόνο μία φορά σε κάθε ερώτηση και μπορείτε να υποθέσετε ότι ο χρόνος να σημειώσει την απάντησή της είναι αμελητέος.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού, K , των συνειδητών απαντήσεων που η Γεωργία δίνει σε ένα διάστημα T λεπτών.

(β) Αν επιλέξουμε τυχαία μία ερώτηση στην οποία απάντησε η Γεωργία, ποια είναι η πιθανότητα ότι η απάντησή της σε αυτή την ερώτηση είναι: (i) μία συνειδητή απάντηση και (ii) μία *σωστή* συνειδητή απάντηση.

(γ) Σε ένα χρονικό διάστημα μήκους T , ποια είναι η πιθανότητα ότι η Γεωργία δίνει ακριβώς r συνειδητές και s υποσυνειδητές απαντήσεις;

(δ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου X από την αρχή της εξέτασης έως τη στιγμή που η Γεωργία δίνει την πρώτη συνειδητή απάντηση η οποία *ακολουθεί τουλάχιστον μία υποσυνειδητή απάντηση*.

(ε) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των συνολικών απαντήσεων της Γεωργίας μέχρι και την τρίτη συνειδητή απάντησή της.

(στ) Το γραπτό της μαζεύεται μόλις έχει απαντήσει ακριβώς σε N ερωτήσεις. Υπολογίστε: (ι) το μέσο αριθμό των σωστών απαντήσεων και (ιι) τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού L των σωστών απαντήσεων.

(ζ) Επαναλάβετε το υποερώτημα (ε), όταν τα γραπτά μαζεύονται μετά από T λεπτά.

Άσκηση 6

Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ορίζουμε ως $N(G_i)$ το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $G_i = (t_i, t_i + c_i]$. Έστω ότι έχουμε n τέτοια διαστήματα, $i = 1, 2, \dots, n$, ξένα μεταξύ τους. Συμβολίζουμε με G την ένωση όλων αυτών των διαστημάτων, $G = \cup_{i=1}^n G_i$, και με c το συνολικό τους μήκος, $c = c_1 + c_2 + \dots + c_n$. Αν $k_i \geq 0$ και με $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, υπολογίστε την πιθανότητα

$$P(N(G_1) = k_1, N(G_2) = k_2, \dots, N(G_n) = k_n \mid N(G) = k).$$