

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/3/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 30/3/2011

Άσκηση 1.

(α) Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής σχισμής, η πιθανότητα εκτέλεσης ενός προγράμματος από το χρήστη 1 είναι $p_1 = p_{1|B}p_B = (2/5) \cdot (5/6) = 1/3$. Η εκτέλεση προγραμμάτων από το χρήστη 1 αποτελεί διαδικασία Bernoulli, με παράμετρο p_1 , συνεπώς:

$$P(1\text{η εκτέλεση προγράμματος από το χρήστη 1 κατά την 4η χρονική σχισμή}) = p_1(1-p_1)^3 = 0.0988.$$

(β) Ουσιαστικά, ζητείται η πιθανότητα η χρονική σχισμή 11 να είναι ενεργή και η 12 να είναι ανενεργή (καθώς οι 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές). Εφόσον τα γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα, η ζητούμενη πιθανότητα που είναι:

$$p_B \cdot p_I = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.1389.$$

(γ) Σε κάθε χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα $p_1 = 1/3$, ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η χρονική στιγμή εκτέλεσης του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι Pascal τυχαία μεταβλητή τάξης 5, με παράμετρο $p_1 = 1/3$ και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της Pascal τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_1} = \frac{5}{1/3} = 15.$$

(δ) Σε κάθε ενεργή χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα $p_{1|B} = 2/5$, ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η ζητούμενη τ.μ. είναι Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο $p_{1|B} = 2/5$ και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_{1|B}} = \frac{5}{2/5} = \frac{25}{2} = 12.5.$$

(ε) Ο αριθμός T των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι ίσος με τον αριθμό B των ενεργών σχισμών μέχρι την εκτέλεση του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1, μειωμένο κατά 5. Ο αριθμός των ενεργών σχισμών (“δοκιμές”) μέχρι το 5ο πρόγραμμα του χρήστη 1 (“επιτυχία”) είναι μία Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο $p_{1|B} = 2/5$ και άρα

$$p_B(t) = \binom{t-1}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{t-5}, \quad t = 5, 6, \dots$$

Εφόσον $T = B - 5$, ισχύει ότι $p_T(t) = p_B(t+5)$ και άρα

$$p_T(t) = \binom{t+4}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της μέσης τιμής και της διασποράς της Pascal τ.μ. B , παίρνουμε τελικά

$$E[T] = E[B] - 5 = \frac{25}{2} - 5 = 7.5$$

και

$$\text{var}(T) = \text{var}(B) = \frac{5(1 - (2/5))}{(2/5)^2}$$

Άσκηση 2.

Έστω t ο αριθμός του παιχνιδιού όταν μπαίνετε στο δωμάτιο. Έστω M ο αριθμός του πιο πρόσφατου παιχνιδιού που κέρδισε ο αδερφός σας και έστω N ο αριθμός του πρώτου παιχνιδιού που θα κερδίσει στο μέλλον. Η τυχαία μεταβλητή $X = N - t$ είναι γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο p . Λόγω συμμετρίας και ανεξαρτησίας των παιχνιδιών, η τυχαία μεταβλητή $Y = t - M$ είναι επίσης γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο p . Τα παιχνίδια που έχει χάσει μεταξύ της πιο πρόσφατης επιτυχίας και της πρώτης αποτυχίας είναι όλα μεταξύ M και N . Το πλήθος τους L είναι

$$L = N - M - 1 = X + Y - 1$$

ώστε, η $L + 1$ έχει μία Pascal PMF τάξης 2, δηλ.

$$P(L + 1 = k) = \binom{k-1}{1} p^2 (1-p)^{k-2}.$$

Άρα,

$$p_L(i) = P(L + 1 = i + 1) = \binom{i}{1} p^2 (1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Άσκηση 3.

Έστω $N_s(t)$ η διαδικασία καταμέτρησης των σπορ αυτοκινήτων και $N_o(t)$ η διαδικασία καταμέτρησης των κοινών αυτοκινήτων που σταμάτησε ο αστυνομικός. Η από κοινού διαδικασία καταμέτρησης, $N(t)$, είναι μία διαδικασία Poisson ρυθμού 6. Κάθε φορά που ο αστυνομικός σταματάει ένα αυτοκίνητο, η πιθανότητα αυτό να είναι κόκκινο σπορ είναι:

$$\frac{4}{2+4} = \frac{2}{3}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} & P(\text{ο αστυνομικός σταματάει τουλάχιστον 2 κοινά αυτοκίνητα πριν σταματήσει 3 σπορ αυτοκίνητα}) \\ &= 1 - P(\text{ο αστυνομικός σταματάει 0 κοινά αυτοκίνητα πριν σταματήσει 3 σπορ αυτοκίνητα}) - \\ & \quad - P(\text{ο αστυνομικός σταματάει 1 κοινό αυτοκίνητο πριν σταματήσει 3 σπορ αυτοκίνητα}) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(α) Θεωρώντας ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δ , έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\text{εργασία από Α}\}|\{\text{υποβάλλεται κάποια εργασία}\}) \\ &= \frac{P(\{\text{υποβάλλεται εργασία από τον Α}\})}{P(\{\text{υποβάλλεται κάποια εργασία}\})} \\ &= \frac{a\delta}{(a+b)\delta} \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$P(\text{ακριβώς 8 από τις επόμενες 12 εργασίες προέρχονται από τον πελάτη Α}) = \binom{12}{8} \left(\frac{a}{a+b}\right)^8 \left(\frac{b}{a+b}\right)^4.$$

(β) Το ερώτημα αφορά τη συνδυασμένη διαδικασία υποβολής εργασιών από τους πελάτες Α και Β, η οποία έχει ρυθμό $a+b$. Με άλλα λόγια, ζητείται η πιθανότητα $P(7, t)$ για ρυθμό $\lambda = a+b$, η οποία είναι:

$$\frac{((a+b)t)^7 e^{-(a+b)t}}{7!}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τη συνδυασμένη διαδικασία, έχουμε:

$$\{M = m\} = \{m \text{ υποβολές από τον Α σε σύνολο } m+5 \text{ υποβολών ΚΑΙ η } (m+6)\text{-η υποβολή είναι από τον Β}\}$$

Από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης της διαδικασίας Poisson προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P(M = m) &= P(m \text{ υποβολές από τον Α σε σύνολο } m+5 \text{ υποβολών}) \times \\ &\quad \times P(\text{η } (m+6)\text{-η υποβολή είναι από τον Β}) \\ p_M(m) &= \binom{m+5}{m} \left(\frac{b}{a+b}\right)^6 \left(\frac{a}{a+b}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Για την εύρεση της μέσης τιμής και της διασποράς της M μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας την PMF που υπολογίσαμε προηγουμένως, είτε να παρατηρήσουμε ότι

$$M = X_1 + X_2 + \dots + X_6$$

όπου η X_i είναι τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των υποβολών του Α μεταξύ της $(i-1)$ -οστής και i -οστής υποβολής του Β. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι X_i είναι i.i.d. τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή μετατοπισμένη κατά 1, με παράμετρο $p = 1 - P(A) = \left(\frac{b}{a+b}\right)$.

Άρα,

$$E[M] = 6E[X] = 6 \left(\frac{a+b}{b} - 1 \right) = \frac{6a}{b} \quad \text{var}(M) = 36\text{var}(X) = \frac{36a(a+b)}{b^2}$$

$$\begin{aligned} \text{(δ)} \quad P(\text{υποβολή εργασίας με 2 προγράμματα}) &= P(\text{υποβολή εργασίας με 3 προγράμματα}) = \\ &= P(\text{υποβολή εργασίας με 4 προγράμματα}) = 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν ίδιο αριθμό προγραμμάτων}) &= P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν 2 προγράμματα}) \\ &\quad + P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν 3 προγράμματα}) \\ &\quad + P(\text{οι πρώτες 4 εργασίες έχουν 4 προγράμματα}) \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ε) Μπορούμε να φτάσουμε εύκολα στην απάντηση του ερωτήματος χρησιμοποιώντας διαίρεση της διαδικασίας Poisson. Δημιουργούμε μια νέα διαίρεση της διαδικασίας του πελάτη A, οι αφίξεις της οποίας αντιστοιχούν σε εργασίες του A που περιλαμβάνουν 3 προγράμματα. Η νέα διαδικασία έχει ρυθμό

$$P(\text{η εργασία έχει 3 προγράμματα}) \times (\text{αρχικός ρυθμός}) = \frac{1}{3}a$$

οπότε η X είναι Erlang τ.μ. 5ης τάξης με παράμετρο $(\frac{1}{3}a)$ και, συνεπώς, η PDF της είναι:

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^5 x^4 e^{-\frac{1}{3}ax}}{4!}, \quad x \geq 0$$

Άσκηση 5.

(α) Η τ.μ. K ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο πλήθος αφίξεων $\mu = \lambda_c T$

$$p_K(k) = \frac{(\lambda_c T)^k e^{-\lambda_c T}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; T \geq 0$$

(β) ι. $P(\text{συνειδητή απάντηση}) = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s}$

$$\begin{aligned} \text{ii. } P(\text{σωστή συνειδητή απάντηση}) &= P(\text{συνειδητή απάντηση}) P(\text{σωστή απάντηση} | \text{συνειδητή απάντηση}) = \\ &= \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s} p_c \end{aligned}$$

(γ) Εφόσον το συνειδητό και το υποσυνείδητο της Γεωργίας απαντούν ανεξάρτητα στις ερωτήσεις,

$$\begin{aligned} P(r \text{ συνειδητές απαντήσεις και } s \text{ υποσυνείδητες απαντήσεις σε διάστημα } T) &= \\ &= P(r \text{ συνειδητές απαντήσεις σε διάστημα } T) \cdot P(s \text{ υποσυνείδητες απαντήσεις σε διάστημα } T) = \\ &= \frac{(\lambda_c T)^r e^{-\lambda_c T}}{r!} \cdot \frac{(\lambda_s T)^s e^{-\lambda_s T}}{s!} \end{aligned}$$

(δ) Έστω X_s το χρονικό διάστημα από την αρχή της εξέτασης μέχρι τη στιγμή της 1ης υποσυνείδητης απάντησης, και X_c το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της 1ης υποσυνείδητης απάντησης μέχρι τη στιγμή της επόμενης συνειδητής απάντησης.

Παρατηρείστε ότι οι X_s και X_c είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τ.μ. με παραμέτρους λ_s και λ_c , αντίστοιχα:

$$f_{X_s}(x_s) = \begin{cases} \lambda_s e^{-\lambda_s x_s} & , x_s \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_{X_c}(x_c) = \begin{cases} \lambda_c e^{-\lambda_c x_c} & , x_c \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$X = X_s + X_c$, άρα η ζητούμενη PDF είναι η συνέλιξη των δύο παραπάνω εκθετικών κατανομών. Για $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_s e^{-\lambda_s(x-x_c)} \lambda_c e^{-\lambda_c x_c} dx_c \\
&= \int_0^x \lambda_s \lambda_c e^{-\lambda_s x} e^{(\lambda_s - \lambda_c)x_c} dx_c \quad x - x_c > 0 \\
&= \lambda_s \lambda_c e^{-\lambda_s x} \int_0^x e^{(\lambda_s - \lambda_c)x_c} dx_c \\
&= \frac{\lambda_s \lambda_c}{\lambda_s - \lambda_c} e^{-\lambda_s x} (e^{(\lambda_s - \lambda_c)x} - 1) \quad \lambda_s \neq \lambda_c \\
&= \frac{\lambda_s \lambda_c}{\lambda_s - \lambda_c} (e^{-\lambda_c x} - e^{-\lambda_s x})
\end{aligned}$$

Στο παραπάνω ερώτημα μπορούμε να ακολουθήσουμε και την οδό του υπολογισμού μέσω των ροπογεννητριών, όπως έχουμε δει στην τάξη.

(ε) Ας χαρακτηρίσουμε ως *επιτυχία* μία συνειδητή απάντηση και *αποτυχία* μία υποσυνείδητη απάντηση. Τότε

$$P(\text{επιτυχία}) = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s}, \quad P(\text{αποτυχία}) = \frac{\lambda_s}{\lambda_c + \lambda_s}$$

Ο αριθμός N των συνολικών απαντήσεων (προσπαθειών) μέχρι και την 3η επιτυχία (συνειδητή απάντηση) ακολουθεί κατανομή Pascal 3-ης τάξης:

$$p_N(n) = \binom{n-1}{2} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s} \right)^3 \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_c + \lambda_s} \right)^{n-3}, \quad n = 3, 4, \dots$$

(στ) ι. $E(\text{σωστές απαντήσεις}) = N \cdot E(\text{Η i-στή ερώτηση είναι σωστή}) = N \left[\frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s} p_c + \frac{\lambda_s}{\lambda_c + \lambda_s} p_s \right]$.

ιι. Θεωρώντας ότι εκτελούμε ένα πείραμα ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli στο οποίο η πιθανότητα επιτυχίας p είναι

$$p = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s} p_c + \frac{\lambda_s}{\lambda_c + \lambda_s} p_s,$$

η ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας είναι Διωνυμική:

$$p_L(l) = \binom{N}{l} \left[\frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s} p_c + \frac{\lambda_s}{\lambda_c + \lambda_s} p_s \right]^l \left[1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s} p_c + \frac{\lambda_s}{\lambda_c + \lambda_s} p_s \right) \right]^{N-l}$$

όπου $l = 0, 1, \dots, N$.

(ς) ι. $E(\text{σωστές απαντήσεις}) = (\lambda_c p_c + \lambda_s p_s) T$.

ιι. Συμβολίζοντας με $\lambda = \lambda_c p_c + \lambda_s p_s$ το μέσο ρυθμό σωστών απαντήσεων, η ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$p_L(l) = \frac{(\lambda T)^l e^{-\lambda T}}{l!}, \quad l = 0, 1, \dots$$

Άσκηση 6.

Θέτουμε $N_i = N(G_i)$ για $i = 1, \dots, n$ και $N_G = N(G)$, οπότε

$$\begin{aligned}
 P(N_1 = k_1, \dots, N_n = k_n | N_G = k) &= \frac{P(N_1 = k_1, \dots, N_n = k_n, N_G = k)}{P(N_G = k)} \\
 &= \frac{P(N_1 = k_1) \cdots P(N_n = k_n)}{P(N_G = k)} \\
 &= \frac{\frac{(c_1 \lambda)^{k_1} e^{-c_1 \lambda}}{k_1!} \cdots \frac{(c_n \lambda)^{k_n} e^{-c_n \lambda}}{k_n!}}{\frac{(c \lambda)^k e^{-c \lambda}}{k!}} \\
 &= \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{c_1}{c} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{c_n}{c} \right)^{k_n} \\
 &= \binom{k}{k_1 \cdots k_n} \left(\frac{c_1}{c} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{c_n}{c} \right)^{k_n}
 \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως μία *πολυωνυμική κατανομή*. Φανταστείτε ότι ρίχνουμε ένα n -πλευρο ζάρι k φορές και ότι η πλευρά i έρχεται με πιθανότητα $p_i = c_i/c$. Η πιθανότητα ότι η πλευρά i έρχεται k_i φορές δίνεται από την παραπάνω έκφραση. Κάνοντας τη σύνδεση με τη διαδικασία Poisson που έχουμε, μπορούμε να πούμε ότι κάθε πλευρά αντιστοιχεί σε ένα διάστημα δειγματοληψίας και ότι η πιθανότητα να δειγματοληπτήσουμε σε αυτό εξαρτάται ευθέως από το σχετικό του μήκος. Αυτό επαληθεύει τη διαισθητική υπόθεσή μας ότι, δοθέντος ενός αριθμού αφίξεων Poisson σε συγκεκριμένο διάστημα, οι αφίξεις ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή.