

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/5/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/5/2011

Άσκηση 1

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις 1 και 2. Έχουμε ότι:

$$P(X_n = 1/X_{n-1} = 1) = \frac{1}{3}$$
$$P(X_n = 2/X_{n-1} = 2) = \frac{1}{2}$$

- (α) Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1)$.
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2)$.
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 2/X_{n-2} = 2)$.
(ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_3 = 1)$ όταν $P(X_1 = 1) = 1/2$.
(στ) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

Άσκηση 2

Η Μαρία έχει δύο κέρματα. Το κέρμα Α φέρνει κεφαλή (Κ) με πιθανότητα a , ενώ το κέρμα Β φέρνει κεφαλή με πιθανότητα b . Αν στην n -στή ρίψη η Μαρία φέρει κεφαλή, στην $(n + 1)$ -στή ρίψη θα χρησιμοποιήσει το κέρμα Α, αλλιώς θα χρησιμοποιήσει το κέρμα Β. Ορίστε τις καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη αυτού του πειράματος, υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης, δώστε το γράφημα, και υπολογίστε την οριακή κατανομή της αλυσίδας. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η k -στή ρίψη θα φέρει κεφαλή, για k αρκετά μεγάλο;

Άσκηση 3

Στο ταμείο της καφετερίας του Πανεπιστημίου εργάζεται μόνο μία υπάλληλος. Λόγω έλλειψης χώρου, επιτρέπει να σχηματίσουν ουρά μπροστά της μόνο M φοιτητές. Αν φτάνοντας στην ουρά κάποιος φοιτητής βρει μπροστά του M συμφοιτητές του (μαζί με αυτόν που εξυπηρετείται εκείνη τη στιγμή), φεύγει αμέσως. Κάθε λεπτό συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα γεγονότα:

- ένας νέος φοιτητής φτάνει με πιθανότητα p ,
- ένας φοιτητής φεύγει με πιθανότητα kq , όπου k είναι ο αριθμός των φοιτητών στην καφετέρια,
- κανένας νέος φοιτητής δεν φτάνει ούτε υπάρχων φεύγει με πιθανότητα $1 - p - kq$ (αν υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής στην καφετέρια) ή με πιθανότητα $1 - p$ (αν δεν υπάρχει).

(α) Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεως-θανάτου. Ορίστε τις κατάλληλες καταστάσεις και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Επισκέπτεστε την καφετέρια αφού αυτή είναι ανοιχτή για αρκετό χρόνο. Πόσους πελάτες περιμένετε να βρείτε στην ουρά;

Άσκηση 4

Θεωρείστε την αλυσίδα Markov με καταστάσεις $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ η οποία περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Ποιες είναι οι έμμονες και μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας; Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και αν είναι περιοδικές ή όχι.

(β) Υπάρχουν οι οριακές (στάσιμες) πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Ποιες είναι αυτές;

(γ) Υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Ποιες είναι αυτές;

(δ) Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1 αλλά ξεκινάμε να την παρατηρούμε αφού έχει μπει σε steady-state. (i) Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνεται κατά ένα στην επόμενη μετάβαση. (ii) Βρείτε την δεσμευμένη πιθανότητα ότι η διαδικασία βρισκόταν στην κατάσταση 2 όταν αρχίσαμε να την παρατηρούμε, δεδομένου ότι η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα στην πρώτη μετάβαση που παρατηρήσαμε. (iii) Βρείτε την πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξήθηκε κατά ένα στην πρώτη αλλαγή κατάστασης που παρατηρήσαμε.

(ε) Έστω ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 4. (i) Για κάθε κλάση επικοινωνίας, βρείτε την πιθανότητα ότι τελικά η διαδικασία θα καταλήξει σε αυτή. (ii) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων έως την πρώτη μετάβαση του συστήματος σε μία κλάση επικοινωνίας;

Άσκηση 5

Ένα πειραματικό ποντίκι είναι φυλακισμένο μέσα σε ένα κλουβί με τρεις πόρτες. Σε κάθε γύρο, το ποντίκι ανοίγει τυχαία μία πόρτα και τρώει ένα κομμάτι τυρί, εάν υπάρχει τέτοιο πίσω από την πόρτα που άνοιξε. Κάθε πόρτα επιλέγεται με ίση πιθανότητα σε κάθε γύρο, ανεξάρτητα από το που το ποντίκι βρήκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Αν δεν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί σε αυτόν τον γύρο είναι $3/4$. Αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και η ίδια πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 0. Ενώ αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και διαφορετική πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 1.

(α) Μας ενδιαφέρει το αν το ποντίκι τρώει το τυρί του σε κάθε γύρο. Ορίστε τη Markovianή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του πειράματος. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

(β) Αν παρατηρήσετε το ποντίκι για 1000 γύρους, σε ποιο ποσοστό αυτών θα το δείτε να τρώει το τυρί του;

(γ) Έστω ότι δεν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει ένα κομμάτι τυρί;

(δ) Έστω ότι δεν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει n κομμάτια τυρί;

Βοήθεια: Στα ερωτήματα (γ) και (δ) χρησιμοποιείτε τις γνώσεις σας σχετικά με μέσους χρόνους ως την πρώτη επίσκεψη και μέσο χρόνο επανόδου, αντίστοιχα.

(ε) Κοιτάτε μέσα στο κλουβί και παρατηρήτε ότι το ποντίκι τρώει ένα κομμάτι τυρί πίσω από την πόρτα 1. Ποια είναι η πιθανότητα ότι 3 γύρους μετά, το ποντίκι θα βρεθεί να τρώει πάλι πίσω από την πόρτα 1;

Βοήθεια: Στο ερώτημα (ε), χρειάζεται να ορίσετε μία νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα που να περιγράφει και τις πόρτες πίσω από τις οποίες το ποντίκι βρίσκει τυρί.