

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

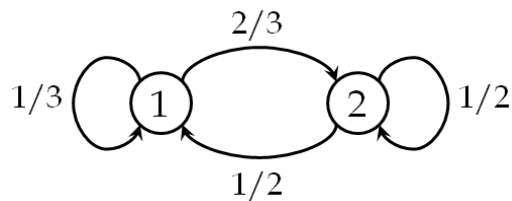
Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/5/2011

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/5/2011

Άσκηση 1.

(α) Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή αλυσίδα θέματος 1 (α)

(β) $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) = \frac{2}{3}$

(γ) $P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2) = P(X_n = 2/X_{n-1} = 1) = \frac{2}{3}$

(δ)

$$\begin{aligned} P(X_n = 2/X_{n-2} = 2) &= P(X_n = 2/X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 2)P(X_{n-1} = 1/X_{n-2} = 2) \\ &+ P(X_n = 2/X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 2)P(X_{n-1} = 2/X_{n-2} = 2) \\ &= P(X_n = 2/X_{n-1} = 1)P(X_{n-1} = 1/X_{n-2} = 2) \\ &+ P(X_n = 2/X_{n-1} = 2)P(X_{n-1} = 2/X_{n-2} = 2) \\ &= p_{12}p_{21} + p_{22}p_{22} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

(ε) $P(X_3 = 1) = P(X_1 = 1)(p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21}) + P(X_1 = 2)(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) = \dots = \frac{31}{72}.$

(στ)

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

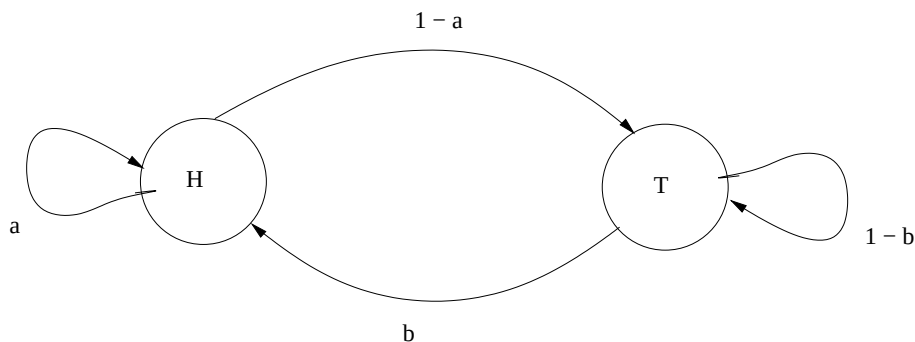
Επομένως

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \end{aligned}$$

Το σύστημα μας δίνει: $\frac{2}{3}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$. Όμως $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Συνεπώς $\pi = \frac{3}{7}$ και $\pi_2 = \frac{4}{7}$.

Άσκηση 2.

Θα μοντελοποιήσουμε την ρίψη των κερμάτων με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις $\{H, T\}$. Γνωρίζουμε ότι $p_{HH} = \alpha$, $p_{HT} = 1 - \alpha$, $p_{TH} = b$, $p_{TT} = 1 - b$. Το γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας για αυτό το πείραμα φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας για την άσκηση 2.

Ζητείται να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι η k -οστή ρίψη θα φέρει κεφαλή, για k αρκετά μεγάλο. Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας μας δίνουν ότι:

$$p_{HT}\pi_H = p_{TH}\pi_T,$$

όπου π_H είναι η πιθανότητα της μόνιμης κατάστασης (steady state), όπου η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα βρίσκεται στην κατάσταση H , και ομοίως για την π_T , οπότε έχουμε:

$$\pi_H = \alpha\pi_H + b\pi_T \quad (1)$$

και

$$\pi_T = (1 - \alpha)\pi_H + (1 - b)\pi_T. \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι

$$\pi_H + \pi_T = 1. \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 1, 2 και 3 έχουμε:

$$\pi_H = \frac{b}{1 - \alpha + b}.$$

Άσκηση 3.

(α) Ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, Σχήμα (3), με τόσες καταστάσεις όσους και φοιτητές, δηλαδή $0, 1, \dots, M$.

(β) Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του ερωτήματος α), οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\pi_i p = \pi_{i+1} (i + 1) q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M - 1.$$

Ορίζουμε $\rho = p/q$, οπότε $\pi_{i+1} = \frac{\rho}{i+1} \pi_i$, άρα,

$$\pi_i = \frac{\rho^i}{i!} \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \quad (4)$$

Όμως, $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_M$ και επομένως,

$$1 = \pi_0 \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^M}{M!} \right),$$



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή αλυσίδα M καταστάσεων.

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}. \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας επομένως τις (4), (5) έχουμε ότι,

$$\pi_i = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Επομένως, ο μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά είναι,

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^M i\pi_i = \rho \cdot \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^M \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Άσκηση 4.

- (α) Οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές ενώ όλες οι άλλες είναι περιοδικές. Υπάρχουν δύο κλάσεις επικοινωνίας. Η κλάση $\{1, 2, 3\}$ είναι μη περιοδική και η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική.
- (β) Αν η διαδικασία αρχίσει από την κατάσταση 1, θα μείνει στην μη περιοδική κλάση επικοινωνίας $\{1, 2, 3\}$ και οι πιθανότητες μετάβασης n – βημάτων θα συγκλίνουν στις στάσιμες πιθανότητες π_i . Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν την εξής μορφή:

$$\pi_1 = \pi_2 \quad \pi_2 = 6\pi_3$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε τελικά ότι:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{6}{13} \quad \pi_3 = \frac{1}{13}$$

- (γ) Επειδή η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική, δεν υπάρχουν οριακές πιθανότητες. Ειδικά, η ακολουθία $r_{66}(n)$ εναλλάσσεται μεταξύ 0 και 1 και δεν συγκλίνει.
- (δ) (i) Η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνει κατά ένα κατά τη διάρκεια της πρώτης μετάβασης ισούται με:

$$0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 = \frac{18}{65}$$

- (δ) (ii) Η πιθανότητα ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 2 και ότι η κατάσταση αυξάνει είναι:

$$0.1\pi_2 = \frac{0.6}{13}.$$

- (δ) (iii) Αν η κατάσταση είναι η 1 (πιθανότητα $6/13$), είναι βέβαιο ότι θα αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης που θα παρατηρήσουμε. Αν η κατάσταση είναι η 2 (πιθανότητα $6/13$), τότε έχει πιθανότητα $1/6$ να αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης που θα παρατηρήσουμε. Επιπλέον, αν η κατάσταση είναι η 3, αυτή δεν μπορεί να αυξηθεί κατά την πρώτη αλλαγή κατάστασης που θα παρατηρηθεί. Επομένως, η πιθανότητα ότι η κατάσταση αυξάνει κατά την πρώτη παρατηρούμενη αλλαγή κατάστασης είναι ίση με:

$$\frac{6}{13} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$$

- (ε) (i) Έστω a_4 και a_5 οι πιθανότητες ότι η επισκεψιμάστε τελικά την κλάση $\{1, 2, 3\}$ αρχίζοντας από τις καταστάσεις 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a_4 &= 0.2 + 0.4a_4 + 0.2a_5, \\ a_5 &= 0.7a_4, \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει:

$$\begin{aligned} a_4 &= 0.2 + 0.4a_4 + 0.14a_4 \\ &= \frac{10}{23} \end{aligned}$$

Επίσης, αρχίζοντας από την κατάσταση 4 η πιθανότητα να φθάσουμε στη κλάση $\{6, 7\}$ είναι: $1 - (10/23) = 13/23$.

- (ε) (ii) Αρχίζοντας από τις καταστάσεις 4 και 5, έστω ότι οι αναμενόμενοι χρόνοι για να φθάσουμε σε μια περιοδική κατάσταση είναι μ_4 και μ_5 αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= 1 + 0.4\mu_4 + 0.2\mu_5 \\ \mu_5 &= 1 + 0.7\mu_4 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και λύνοντας ως προς τον μ_4 θα πάρουμε τελικά ότι:

$$\mu_4 = \frac{60}{23}.$$

Άσκηση 5.

- (α) Ορίζουμε τις δύο καταστάσεις: Κατάσταση 1 - "Το ποντίκι βρίσκει τυρί" και Κατάσταση 2 - "Το ποντίκι δεν βρίσκει τυρί." Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης αυτής της αλυσίδας είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

- (β) Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνουν:

$$\pi = [\pi_1 \quad \pi_2] = \pi P = [\pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα μας δίνει: $\frac{1}{3}\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2$. Όμως $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Συνεπώς $\pi_1 = \frac{9}{13} = 0.692$ και $\pi_2 = \frac{4}{13}$. Άρα, στους 1000 γύρους το ποντίκι θα τρώει τυρί στους 692.

- (γ) Το ερώτημα ζητά να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο έως την πρώτη επίσκεψη της κατάστασης 1 ξεκινώντας από την κατάσταση 2. Σύμφωνα με τις σημειώσεις (σελ. 82) έχουμε ότι $s = 1$ και:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= 1 + p_{21}t_1 + p_{22}t_2 = 1 + \frac{1}{4}t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{3} = 1.33. \end{aligned}$$

(δ) Εδώ μας ζητείται ο μέσος χρόνος, T , μέχρι την επίσκεψη της κατάστασης 1 από την 2 ακολουθούμενος από $(n - 1)$ επανόδους στην κατάσταση 1 ξεκινώντας από την 1:

$$T = t_2 + (n - 1)t_1^*,$$

όπου $t_2 = \frac{4}{3}$ (από το υποερώτημα γ) και

$$t_1^* = 1 + p_{11}t_1 + p_{12}t_2 = 1 + \frac{1}{3}\frac{4}{3} = \frac{13}{9}.$$

Συνεπώς,

$$T = \frac{4}{3} + (n - 1)\frac{13}{9}.$$

(ε) Εδώ μας ενδιαφέρει πίσω από ποια πόρτα βρίσκει το ποντίκι να φάει. Επομένως, ορίζουμε κατάλληλα τις εξής καταστάσεις:

Κατάσταση i : "Το ποντίκι βρίσκει τυρί πίσω από την πόρτα $i, j = 1, 2, 3$ "

Κατάσταση 4: "Το ποντίκι δεν βρίσκει τυρί"

Για αυτή τη νέα αλυσίδα, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Υπάρχουν 7 διαδρομές μήκους 3 που ξεκινούν και καταλήγουν στην κατάσταση 1:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{27}$)
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{36}$)
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{27}$)
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{36}$)
 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{36}$)
 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{36}$)
 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (πιθανότητα: $\frac{1}{48}$)

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $2\frac{1}{27} + 4\frac{1}{36} + \frac{1}{48} = 0.206$.