

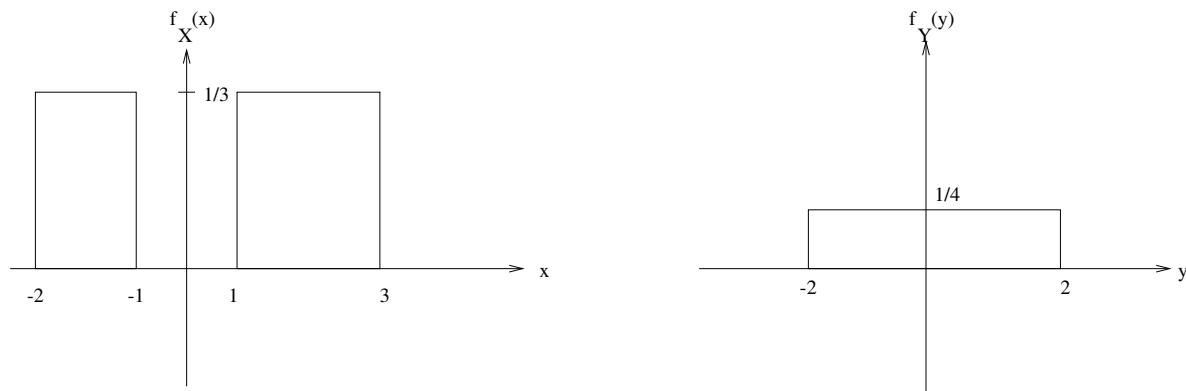
ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες
Εαρινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/03/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/03/2012

Άσκηση 1. Οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y έχουν τις συνάρτησεις πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που φαίνονται στο Σχήμα ::. Ορίζουμε το άθροισμα των δύο τ.μ., $W = X + Y$. Υπολογίστε τη σ.π.π., $f_W(w)$, της τ.μ. W , υπολογίζοντας τη συνέλιξη των $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ με γραφικό τρόπο.



Σχήμα 1: Κατανομές των τ.μ. X και Y της άσκησης 1.

Άσκηση 2. Για τις περιπτώσεις (α) και (β) παρακάτω, υπολογίστε το φράγμα Chebyshev καθώς και την ακριβή τιμή της πιθανότητας του γεγονότος $|X - E[X]| \geq c$. Δώστε τη γραφική παράσταση τόσο του φράγματος όσο και της ακριβούς τιμής της πιθανότητας ως συνάρτηση του c (για $0 \leq c \leq 4$). Είναι το φράγμα Chebyshev πιο χρήσιμο για μικρές ή για μεγάλες τιμές της σταθεράς c ;

(α) Η τ.μ. X είναι τυπική Γκαουσιανή, $X \sim N(0, 1)$.

(β) Η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-b, b]$. (Σε αυτή την περίπτωση επιλέξτε την τιμή $b = 2.5$ για τη γραφική παράσταση.)

Άσκηση 3. Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. X , Y και Z . Η τ.μ. X είναι Bernoulli με παράμετρο $p = 1/3$. Η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda = 2$. Η τ.μ. Z είναι Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.

(α) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $2Z + 3$.

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Y + Z$.

(γ) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $U = XY + (1 - X)Z$.

Άσκηση 4 Ένας αστρονόμος θέλει να υπολογίσει τη φωτεινότητα b ενός μακρινού άστρου με σφάλμα το οποίο με πιθανότητα 95% είναι μικρότερο από 0.1. Το τηλεσκόπιο του προσθέτει τυχαίο θόρυβο N για τον οποίο γνωρίζει ότι έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 2 και του οποίου τα δείγματα είναι ανεξάρτητα από τη μία μέτρηση στην άλλη. Επομένως, κάθε μέτρηση που κάνει, X_k , μπορεί να μοντελοποιηθεί ως το άθροισμα της (άγνωστης) σταθερής τιμής της φωτεινότητας, b , του άστρου και της τ.μ. N_k του θορύβου:

$$X_k = b + N_k.$$

Για να μειώσει το σφάλμα της εκτίμησης, ο αστρονόμος πραγματοποιεί ένα πλήθος από n ανεξάρτητες μετρήσεις και υπολογίζει το μέσο όρο τους:

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

(α) Χρησιμοποιείτε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) για να υπολογίσετε προσεγγιστικά το πλήθος των μετρήσεων που απαιτούνται για να επιτύχει ο αστρονόμος το στόχο του ως προς την ακρίβεια της εκτίμησης της ποσότητας b .

(β) Χρησιμοποιείτε το φράγμα Chebyshev για να υπολογίσετε ένα αυστηρό άνω όριο για το πλήθος των μετρήσεων που να εξασφαλίζει τη ζητούμενη ακρίβεια.

Άσκηση 5. Σε ένα παιχνίδι τύχης, ξεκινάτε με ένα ευρώ και σε κάθε ανεξάρτητη ρίψη ενός *δίκαιου* κέρματος είτε διπλασιάζετε τα χρήματά σας είτε χάνετε τα τρία τέταρτα αυτών. Για να περιγράψουμε μαθηματικά την εξέλιξη του παιχνιδιού, ας ορίσουμε μία ακολουθία από ανεξάρτητες και όμοια κατανοημένες τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots$, με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(Y_k = 2) = P(Y_k = \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, \text{ για κάθε } k \geq 1.$$

Τότε, τα χρήματά σας, F_n , αμέσως μετά από την n -στή ρίψη είναι:

$$F_n = Y_1 Y_2 \cdots Y_n.$$

Επίσης ορίζουμε το λογάριθμο των χρημάτων:

$$L_n = \log_2(F_n).$$

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή της περιουσίας σας μετά από n ρίψεις, $E[F_n]$.

(β) Υπολογίστε τη διασπορά της περιουσίας σας μετά από n ρίψεις, $var(F_n)$.

(γ) Εξηγήστε σε μία πρόταση με ποιο τρόπο θα βρεθείτε με 1 ευρώ (δηλαδή με το ποσό με το οποίο αρχίσατε το παιχνίδι) μετά από n ρίψεις.

(δ) Υπολογίστε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα ότι τα χρήματά σας είναι ίσα ή περισσότερα από 1 ευρώ μετά από n ρίψεις. (Βοήθεια: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Chebyshev στη Διωνυμική κατανομή.)

(ε) Η μέση τιμή $E[F_n]$ που υπολογίσατε στο (α) τείνει στο άπειρο καθώς το n τείνει στο άπειρο. Από την άλλη, η πιθανότητα στο (δ) τείνει στο 0 για $n \rightarrow \infty$. Αποτελεί αυτό μία αντίφαση; Εξηγήστε την απάντησή σας.

(στ) Εφαρμόστε το ΚΟΘ στην τ.μ. L_n ώστε να υπολογίσετε την τιμή N για την οποία ισχύει ότι:

$$P(F_n \geq 0.01) \leq 0.01, \text{ για κάθε } n \geq N.$$