

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/03/2012

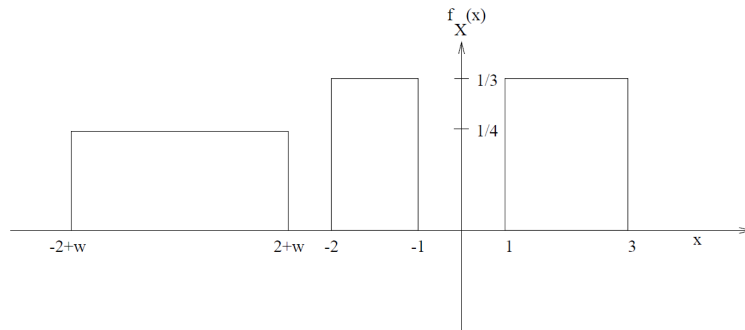
Ημερομηνία Παράδοσης: 28/03/2012

Άσκηση 1.

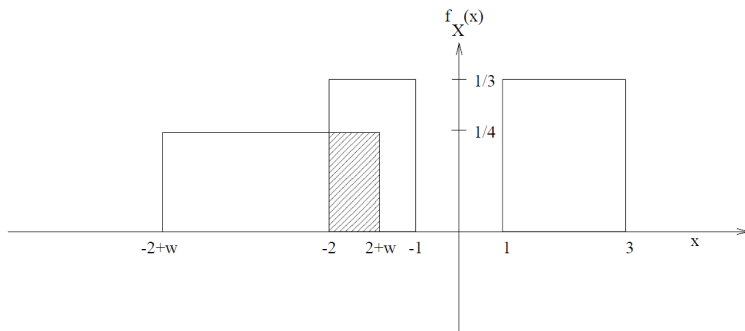
Επειδή οι X και Y είναι ανεξάρτητες,

$$f_W(w) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(w-x)dx$$

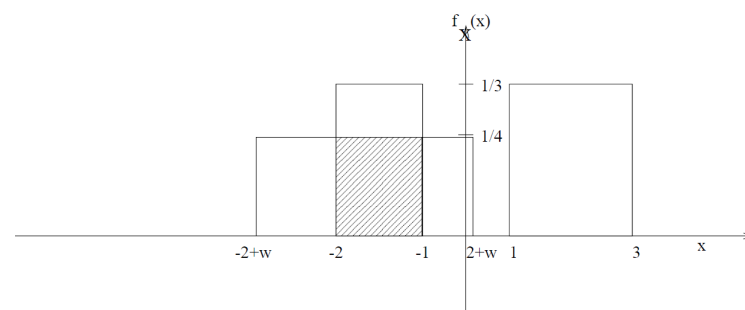
Παρακάτω παρουσιάζεται γραφικά η συνέλιξη:



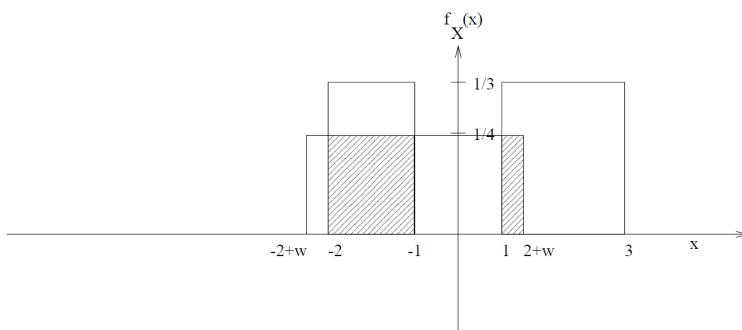
Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εικόνα, $f_W(w) = 0$ για $w < -4$.



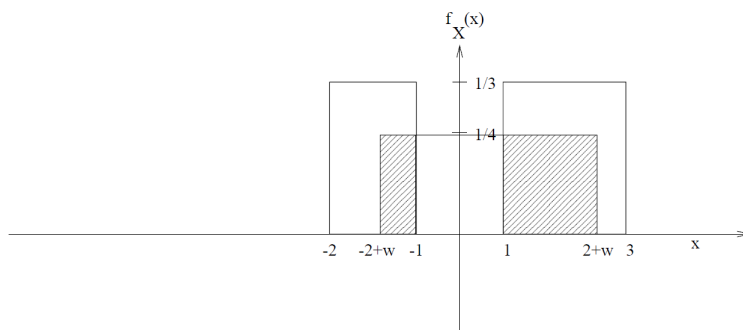
Για $-4 \leq w \leq -3$, $f_W(w) = \frac{w+4}{12}$.



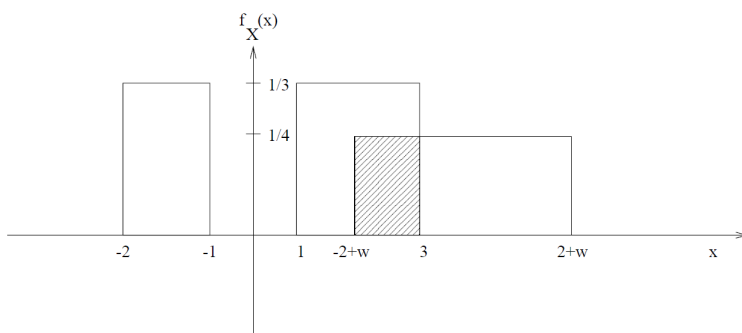
Για $-3 \leq w \leq -1$, $f_W(w) = \frac{1}{12}$.



Για $-1 \leq w \leq 0$, $f_W(w) = \frac{1}{12} + \frac{w+1}{12} = \frac{w+2}{12}$.



Για $0 \leq w \leq 3$, $f_W(w) = \frac{1-w}{12} + \frac{w+1}{12} = \frac{1}{6}$.



Για $3 \leq w \leq 5$, $f_W(w) = \frac{5-w}{12}$.

Συνεπώς έχουμε την παρακάτω pdf για το w :

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & , w < -4 \\ \frac{w+4}{12} & , -4 \leq w \leq -3 \\ \frac{1}{12} & , -3 \leq w \leq -1 \\ \frac{w+2}{12} & , -1 \leq w \leq 0 \\ \frac{1}{6} & , 0 \leq w \leq 3 \\ \frac{5-w}{12} & , 3 \leq w \leq 5 \\ 0 & , w > 5 \end{cases}$$

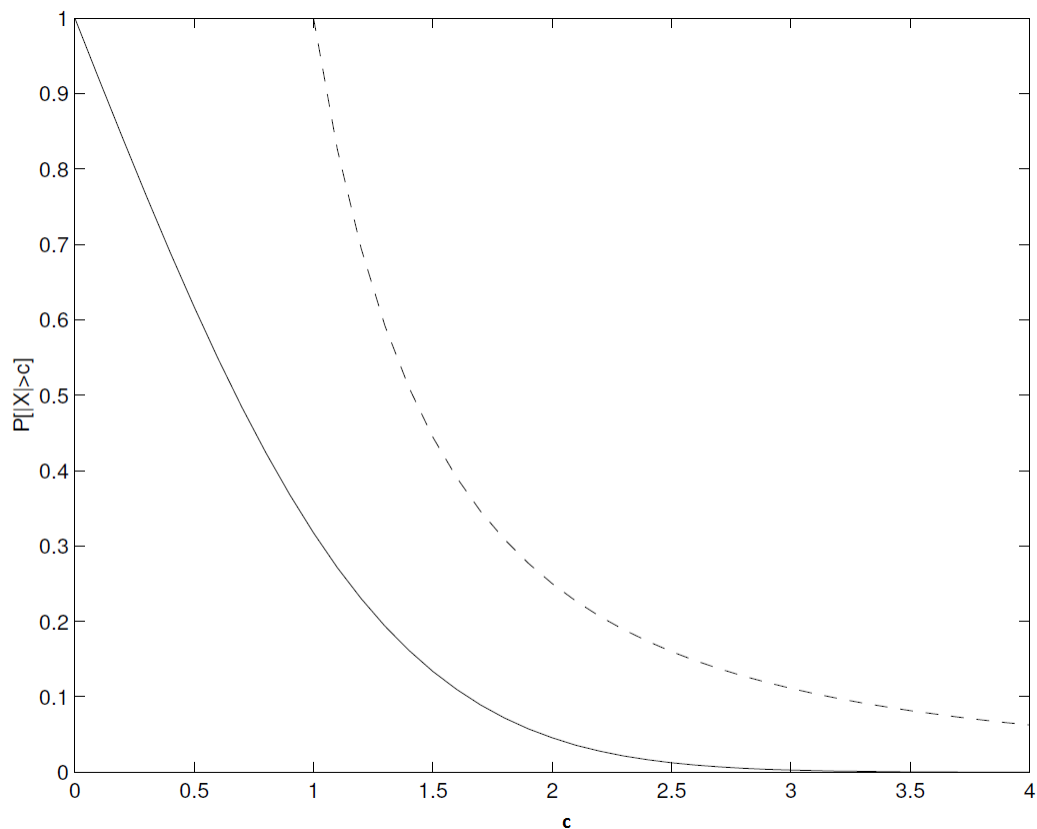
Άσκηση 2.

(α) Εάν $X \sim N(0, 1)$, τότε $E[X] = 0$ και $\text{var}(X) = \sigma_X^2 = 1$. Η ανισότητα Chebyshev είναι:

$$P[|X - 0| > c] \leq \frac{\sigma_X^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Για το φράγμα Chebyshev, σημειώστε ότι για $c \leq 1$ το φράγμα στη πιθανότητα είναι μεγαλύτερο από 1 και συνεπώς δεν είναι πολύ χρήσιμο. Η ακριβής πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της συνάρτησης Φ ως,

$$P[|X - 0| > c] = P(X > c) + P(X < -c) = 2(1 - \Phi(\frac{c}{\sigma})) = 2(1 - \Phi(c)).$$



Σχήμα 1: Διακεκομμένη γραμμή: Chebyshev φράγμα, Ευθεία γραμμή: Ακριβής πιθανότητα

(β) Εάν $X \sim \text{Unif}[-b, b]$, τότε $E[X] = 0$ και $\text{var}(X) = \frac{4b^2}{12} = \frac{b^2}{3}$. Η ανισότητα Chebyshev είναι:

$$P[|X - 0| > c] \leq \frac{b^2}{3c^2}, c \geq 0,$$

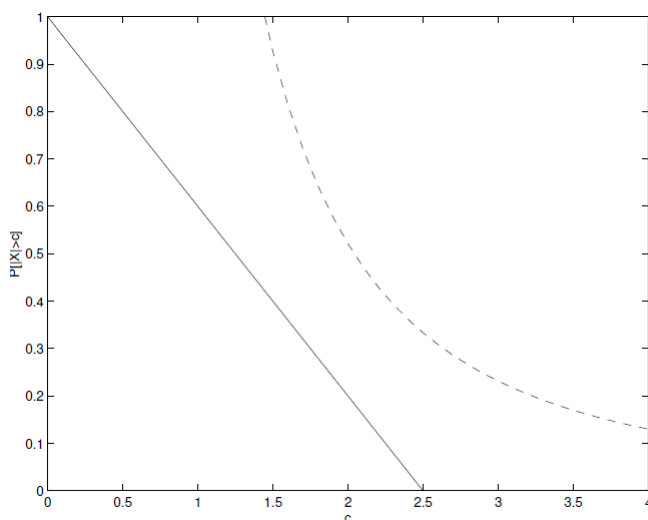
και η ακριβής πιθανότητα είναι

$$P[|X - 0| > c] = P(X > c) + P(X < -c)$$

άρα

$$P[|X - 0| > c] = \begin{cases} \frac{b-c}{b}, & 0 < c < b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο παρακάτω διάγραμμα έχουμε $b = 2.5$



Σχήμα 2: Διακεκομμένη γραμμή: Chebyshev φράγμα, Ευθεία γραμμή: Ακριβής πιθανότητα, $\beta = 2.5$

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, όταν το c είναι κοντά στο μηδέν, το φράγμα είναι μεγαλύτερο από 1, συνεπώς δεν είναι χρήσιμο. Καθώς το c αυξάνεται, το φράγμα είναι πιο κοντά στην ακριβή πιθανότητα. Το φράγμα Chebyshev είναι γενικά μάλλον συντηρητικό. Ωστόσο, μπορεί να είναι χρήσιμο λόγω της απλότητας του και επειδή δε χρειάζεται να γνωρίζουμε την βασική κατανομή, παρά μόνο τη μέση τιμή και τη διακύμανση.

Άσκηση 3.

Οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις για τις X , Y και Z είναι

$$M_X(s) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^s$$

$$M_Y(s) = \frac{2}{2-s}, s > 2$$

$$M_Z(s) = e^{3(e^s-1)}$$

(α) Με άμεση αντικατάσταση του $2Z + 3$ στη μέση τιμή,

$$M_{2Z+3}(s) = E[e^{s(2Z+3)}] = e^{3s} E[s^{s(2Z)}] = e^{3s} M_Z(2s) = e^{3s} e^{3(e^{2s}-1)}$$

(β) Αφού οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες,

$$M_{Y+Z}(s) = M_Y(s)M_Z(s) = \frac{2}{2-s} e^{3(e^s-1)}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ξαναγράψουμε τη *pdf* του U , πριν πάρουμε το μετασχηματισμό του U .

$$f_U(u) = f_{U|X}(u|1)P(X=1) + f_{U|X}(u|0)P(X=0)$$

$$= f_Y(u)P(X=1) + f_Z(u)P(X=0)$$

Συνεπώς,

$$M_U(s) = \frac{1}{3}M_Y(s) + \frac{2}{3}M_Z(s) = \frac{1}{3} \frac{2}{2-s} + \frac{2}{3} e^{3(e^s-1)}.$$

Μια διαφορετική λύση είναι να υποθέσουμε την υποσυνθήκη αναμενόμενη τιμή ως εξής:

$$M_U(s) = E[e^{s(XY+(1-X)Z)}] = P(X=1)E[e^{s(1 \cdot Y+0 \cdot Z)}] + P(X=0)E[e^{s(0 \cdot Y+1 \cdot Z)}]$$

$$= \frac{1}{3}M_Y(s) + \frac{2}{3}M_Z(s) = \frac{1}{3} \frac{2}{2-s} + \frac{2}{3} e^{3(e^s-1)}$$

Άσκηση 4.

Ξεκινάμε διαπιστώνοντας ότι

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{(b + N_1) + (b + N_2) + \dots + (b + N_n)}{n} \\ &= b + \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{n} \end{aligned}$$

Συνεπώς $E[M_n] = b$ και $\text{var}(M_n) = \sigma_{M_n}^2 = \frac{\text{var}(N_i)}{n} = \frac{4}{n}$, καθώς οι N_i s είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές.

(α) Ενδιαφερόμαστε να διασφαλίσουμε ότι η πιθανότητα το σφάλμα να είναι μικρότερο από 0.1 είναι 95%. Συνεπώς,

$$P(|M_n - b| < 0.1) = P\left(\left|\frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{n}\right| < 0.1\right) \geq 0.95$$

Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) έχουμε ότι το $\frac{M_n - b}{\sigma_{M_n}}$ προσεγγίζει τη κανονική κατανομή καθώς το $n \rightarrow \infty$. Για να αποκτήσουμε αυτή τη μορφή, διαιρούμε και τις δύο πλευρές με την τυπική απόκλιση του M_n .

$$P\left(\left|\frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{2\sqrt{n}}\right| < \frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.95,$$

όπου $\frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{2\sqrt{n}}$ έχει μέση τιμή μηδέν και διακύμανση 1. Έχοντας μεγάλο n , μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΚΟΘ για να προσεγγίσουμε την αριστερή πλευρά

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) &\geq 0.95 \\ \Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right)) &\geq 0.95 \\ \Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) &\geq \frac{1.95}{2} = 0.975. \end{aligned}$$

Από το πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής έχουμε ότι $\Phi(x) \approx 0.975$, για $x = 1.96$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 1.96 &\approx \frac{0.1\sqrt{n}}{2} \\ n &\approx 1537 \end{aligned}$$

(β) Σύμφωνα με το φράγμα Chebyshev έχουμε ότι

$$P(|Y - E[Y]| \geq c) \leq \frac{\sigma_Y^2}{c^2}.$$

Εφαρμόζοντας αυτό το φράγμα για $Y = M_n$, $c = 0.1$, και $E[M_n] = b$ έχουμε

$$P(|M_n - b| \geq 0.1) \leq \frac{\sigma_{M_n}^2}{0.1^2} = 1 - 0.95$$

Συνεπώς, η $\frac{4}{n(0.1)^2} = 0.05$ δίνει ένα κατώτερο όριο για το n ίσο με 8000. Συνεπώς, κάθε $n \geq 8000$ επιτυγχάνει την απαιτούμενη απόδοση.

Ενώ το ΚΟΘ παρέχει μια προσέγγιση για τον αριθμό των μετρήσεων που χρειάζονται για να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο απόδοσης, η ανισότητα Chebyshev εγγυάται μια δεδομένη απόδοση. Στη περίπτωση αυτή, ο αστρονόμος είναι σίγουρος ότι αν πάρει τουλάχιστον 8000 μετρήσεις, με πιθανότητα τουλάχιστον 95% το σφάλμα της εκτίμησης του θα είναι μικρότερο από 0.1.

Άσκηση 5.

(α) $E[F_n] = E[Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_n] = E[Y_1]E[Y_2] \cdots E[Y_n] = [\frac{1}{2}(2 + \frac{1}{4})]^n = (\frac{9}{8})^n$ ευρώ, όπου χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των Y_k για να εκφράσουμε την αναμενόμενη τιμή των γινομένων τους ως το γινόμενο των αναμενόμενων τιμών.

(β) Ομοίως, $E[F_n^2] = E[Y_1^2 \cdot Y_2^2 \cdot \dots \cdot Y_n^2] = E[Y_1^2] \cdot E[Y_2^2] \cdot \dots \cdot E[Y_n^2] = [\frac{1}{2}(4 + \frac{1}{16})]^n = (\frac{65}{32})^n$, όπου κι σε αυτή τη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των Y_k . Συνεπώς, $var(F_n) = E[F_n^2] - (E[F_n])^2 = (\frac{65}{32})^n - (\frac{9}{8})^n = \frac{(130)^n - (81)^n}{(64)^n}$.

(γ) Δύο νίκες τετραπλασιάζουν τα χρήματα και μία ήττα τα πολλαπλασιάζει με $\frac{1}{4}$. Συνεπώς, δύο νίκες μπορούν να ακυρώσουν μια ήττα ώστε να μην επηρεαστεί το ποσό με το οποίο ξεκίνησε το παιχνίδι.

(δ) Έστω ότι X_n είναι ο αρχικός αριθμός από κορόνες στις πρώτες n ρίψεις. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας για τη X_n είναι Διωνυμική με παραμέτρους $\frac{1}{2}$ και n . Τα χρήματα είναι 1 ευρώ ή περισσότερα μετά από τη n -στη ρίψη αν και μόνο αν $X_n \geq 2(n - X_n)$, δηλαδή $X_n \geq 2n/3$. Σημειώστε ότι $E[X_n] = n/2$ και $var(X_n) = n/4$, και ισχύει ότι

$$P(X_n \geq \frac{2n}{3}) = P(X_n - \frac{n}{2} \geq \frac{2n}{3} - \frac{n}{2} = \frac{n}{6}) \leq P(|X_n - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{6}) \leq \frac{(n/4)}{(n/6)^2} = 9/n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

(ε) Το αναμενόμενο κέρδος $(9/8)^n$ του παίχτη τείνει στο άπειρο για n , ενώ η πιθανότητα να κερδίσει περισσότερα ή ίσα φράζεται από το $(9/n)$, το οποίο μηδενίζεται για μεγάλο n . Συνεπώς, είναι πολύ πιθανό η F_n να βρίσκεται αρκετά κάτω από τη μέση τιμή για μεγάλο n . Αυτό θα ήταν απίθανο (έστω σύμφωνα με τη Chebyshev ανισότητα), αν δεν ίσχυε το γεγονός ότι η διακύμανση της F_n μεγαλώνει αρκετά γρήγορα με το n . Ποσοτικά έχουμε,

$$\frac{E[F_n] - 1}{\sigma_{F_n}} = \frac{(9/8)^n - 1}{\sqrt{\frac{(130)^n - (81)^n}{(64)^n}}} \approx \frac{(9/8)^n}{\sqrt{(130/64)^n}} = (0.79)^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

δηλαδή για μεγάλο n , η μέση τιμή της F_n διαφέρει από την τιμή 1 κατά ένα αμελητέο ποσοστό της σ_{F_n} .

(στ) Έστω $Z_k = \log(Y_k)$. Τότε,

$$L_n = \log_2(Y_1 Y_2 \cdots Y_N) = \log_2(Y_1) + \log_2(Y_2) + \cdots + \log_2(Y_n) = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

Επομένως,

$$(F_n \geq 0.01) = (L_n \geq \log_2(0.01)) = (L_n \geq -6.64) = (Z_1 + \dots + Z_n \geq -6.64)$$

Αφού οι Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και οι Z θα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον, $E[Z_k] = \frac{1}{2}(1 - 2) = -1/2$ και $\sigma_{Z_k}^2 = var(Z_k) = E[Z_k^2] - (E[Z_k])^2 = 5/2 - 1/4 = 9/4$.

Για να χρησιμοποιήσουμε το ΚΟΘ σημειώστε ότι

$$(Z_1 + \dots + Z_n \geq -6.64) = \left(\frac{Z_1 + \dots + Z_n - nE[Z_k]}{\sqrt{n}\sigma_{Z_k}} \geq \frac{-6.64 + n/2}{3\sqrt{n/2}} \right).$$

Η ποσότητα στα αριστερά έχει περίπου μια $N(0, 1)$ αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας για μεγάλα n , συνεπώς αναζητούμε το n για το οποίο ισχύει

$$1 - \Phi\left(\frac{-6.64 + n/2}{3\sqrt{n}/2}\right) \leq 0.01$$

$$\Phi\left(\frac{-6.64 + n/2}{3\sqrt{n}/2}\right) \geq 0.99$$

$$\frac{-6.64 + n/2}{3\sqrt{n}/2} \geq 2.33$$

$$n \geq 73.$$